

異なる論理の共存と証明論的意味論における調和概念について  
A Peaceful Coexistence of Different Logics and the Concept of Harmony in  
Proof-Theoretic Semantics

豊岡 正庸

**Abstract**

This paper considers Prawitz's concept of "peaceful coexistence" of different logics from the viewpoint of "harmony" in proof-theoretic semantics. A system realizes peaceful coexistence (or a system is ecumenical) if it contains connectives of different logics and the behavior of each connective is preserved in the system. As an example of such a system, Prawitz proposed an ecumenical system containing intuitionistic and classical logical connectives, though Prawitz used only one negation in the system. This paper focuses on the behavior of the classical and intuitionistic negations and discusses a possibility of peaceful coexistence of the two negations.

**1 研究テーマ**

本論文では異なる論理の共存について論じる。異なる論理の間で不一致がある場合、両者が用いる同一の論理結合子に、異なる意味を付与している、ということが原因でありうる。この場合、両者は対立しているというよりも、異なる議題について議論している。このような状況を明示的にするため、異なる論理に属する論理結合子を一つの体系に収めることが求められる。このアイデアのもと、複数の論理の論理結合子を含む体系として Ecumenical System (以下、ES と表記する) が提案されてきた。Prawitz [8] は ES の一例として、古典論理と直観主義論理の論理結合子を含んだ体系を提案した。

異なる論理の論理結合子を含む体系が、ES として認められるためには、それらの論理結合子は「平和的に共存」していなければならない。換言すれば、体系の中に含まれることで、論理結合子の振る舞いに変化してはならない。この要請を理解するための観点として重要なのが、証明論的意味論 (Proof-Theoretic Semantics、以下 PTS) における調和 (harmony) という概念である。PTS はモデル論的意味論に代わるものとして、Prawitz [6, 7] や Dummett [4] により提案され、証明によって意味を捉えようとする点に特色がある。PTS における証明とは、推論規則により正当化を受けた論証のことである。Prawitz は PTS と ES の関連について明示的に述べてはいないが、推論規則により論理結合子の意味を捉えようとしている点は共通である。

PTS では体系に含まれている推論規則により、論証は正当化されるが、いかなる規則をもつ論理結合子も、無際限に認めるべきではない。これは、Prior [9] による架空の論理結合子 **tonk** についての洞察から明らかである。**tonk** は以

下の導入則と除去則を持つ。

$$\frac{A_i}{A_1 \text{ tonk } A_2} \text{ (tonkI)} \quad \frac{A_1 \text{ tonk } A_2}{A_i} \text{ (tonkE)}$$

この論理結合子 **tonk** を用いることで、以下の論証が構成可能となる。

$$\frac{\frac{A}{A \text{ tonk } B} \text{ (tonkI)}}{B} \text{ (tonkE)}$$

この論証から分かるように、論理結合子 **tonk** を認めると、 $A$  から全く関係のない  $B$  を導出することができてしまう。PTS ではこのような病理的な論理結合子を除外するための基準として**調和** (harmony) という概念を提案する。次節ではこの調和概念の内実について述べる。

## 2 研究の背景・先行研究

調和はDummett [4] により提案された概念であり、**全体的調和** (total harmony) と**局所的調和** (local harmony) からなる。ある論理結合子の導入則と除去則が局所的に調和しているとは、論証において、導入則の直後に除去則が用いられている場合、その除去則の適用をなくすることができる、ということである。論理結合子  $\wedge$  の場合、これは以下のようになされる。

$$\frac{\frac{\Pi_1 \quad \Pi_2}{A_1 \quad A_2} (\wedge I)}{A_i \wedge A_2} (\wedge E) \rightsquigarrow \frac{\Pi_i}{A_i}$$

この操作のことを**簡約** (reduction) と呼ぶ<sup>1</sup>。ある論理結合子が局所的調和の要請を満たしているのは、その論理結合子の導入則と除去則に関して、簡約が可能であるということになる。

一方で、**全体的調和** (total harmony) は**保存的拡大** (conservative extension) により特徴づけられる。ある論理結合子が全体的調和の要請を満たしているのは、その論理結合子を体系に加えても、元の体系に含まれる論理結合子で表現されるいかなる論理式も、新たに導出されることがない場合である。

この二つの調和の基準を先ほどの病理的な論理結合子 **tonk** に対して適用する。まず、**tonk** は局所的調和の要請を満たさない。なぜなら、以下の論証は一般に簡約不可能であるからである。

$$\frac{\frac{\Pi}{A}}{A \text{ tonk } B} \text{ (tonkI)} \quad \frac{A \text{ tonk } B}{B} \text{ (tonkE)}$$

また、tonk は基本的に全体的調和の要請も満たさない。上記の論証から分かるように、tonk の導入則と除去則を連続して適用することで、前提の論理式  $A$  から、任意の論理式  $B$  が導出可能となるため、tonk を加えた体系は、一般に元の体系の保存的拡大にはならない。

このように、tonk は二つの調和の基準により、論理結合子として認められない。そして、tonk における全体的調和の失敗は、局所的調和の失敗に原因を持つように見える。それでは、局所的調和を満たす論理結合子は、全体的調和を必ず満たすといえるのだろうか。

答えは否定的なものになる。これは Dummett [4] による以下の例より明らかである。架空の論理結合子  $\Delta$  を考える。 $\Delta$  は以下の二つの規則を持つ。

$$\frac{A_i}{A_1 \Delta A_2} (\Delta I) \quad \frac{[A_1]_m \quad [A_2]_n \quad \begin{array}{c} \vdots \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ C \end{array}}{C} (\Delta E)_{m,n} \dagger$$

†  $\Delta$  の除去則においては、前提  $C$  はそれぞれ  $A_1$ 、 $A_2$  以外の仮定に依存してはいけない

論理結合子  $\Delta$  は通常の  $\vee$  の導入則と、 $\vee$  の除去則の制限されたバージョンを規則として持つ。通常の導入則と除去則を持つ論理結合子  $\wedge$  と  $\Delta$  からなる体系では、 $(A \wedge (B \Delta C))$  から  $(A \wedge B) \Delta (A \wedge C)$  は導出不可能である。この体系に通常の導入則と除去則を持つ論理結合子  $\vee$  を加えよう。 $\vee$  の導入則と除去則に対しては簡約が可能であり、それゆえ  $\vee$  は局所的調和を満たす。しかし、 $\vee$  を  $\wedge$  と  $\Delta$  からなる体系に加えると、 $(A \wedge (B \Delta C))$  から  $(A \wedge B) \Delta (A \wedge C)$  は導出可能となり、保存的拡大は成立しない。これは、 $A \Delta B$  と  $A \vee B$  が相互に導出可能となることから生じる。実際、 $A \vee B$  から  $A \Delta B$  は以下のように導出できる。

$$\frac{A \vee B \quad \frac{[A]_1}{A \Delta B} (\Delta I) \quad \frac{[B]_2}{A \Delta B} (\Delta I)}{A \Delta B} (\vee E)_{1,2}$$

同様に  $A \Delta B$  から  $A \vee B$  も導出することができる。

この例から分かるように、簡約が可能な論理結合子だからといって、その論理結合子を加えた体系が元の体系の保存的拡大となるとは限らない。ゆえに、局所的調和が成立しても、全体的調和が成立しないケースはありうることになる。そしてこのことは、論理の共存の問題と深くかかわる。大西 [11] によれば、 $\Delta$  は量子論理で用いられる選言である。保存的拡大の失敗は、 $\Delta$  と  $\vee$  が相互に導出可能になってしまうことを原因として持つ。両者が導出可能にな

ということとは、体系の中に、古典論理における選言を加えられると、量子論理の選言がその特徴を保たなくなるということを意味する。つまり、この方法では論理結合子の振る舞いを保存したまま、古典論理と量子論理を共存させることはできない。このことから、PTSにおける調和概念のうち、少なくとも全体的調和は、論理の共存のための必要条件であるように思える。保存拡大の失敗は論理結合子の振る舞いの変化を意味するからである。

第1節で述べたように、Prawitz [8] は ES の一例として、直観主義論理と古典論理の結合子を含む体系を提案した。Prawitz は  $(RAA)^2$  以外の通常的な自然演繹の規則は簡約が可能であり、そのため構成的な証明を生み出すと述べ、通常的な自然演繹の規則を、当の論理結合子の直観主義論理における振る舞いを与えるものとする。そして、古典的な選言である  $\vee_c$  と、古典的な含意である  $\rightarrow_c$  の振る舞いを定める以下の規則を直観主義論理の自然演繹の体系に加える。なお、以後  $\vee$  と  $\rightarrow$  は直観主義論理における選言と含意を表すとする。

$$\frac{[\neg A]_m \quad [\neg B]_n}{\frac{\perp}{A \vee_c B} (\vee_c I)_{m,n} \quad \frac{A \vee_c B \quad \neg A \quad \neg B}{\perp} (\vee_c E)}$$

$$\frac{[A]_m \quad [\neg B]_n}{\frac{\perp}{A \rightarrow_c B} (\rightarrow_c I)_{m,n} \quad \frac{A \rightarrow_c B \quad A \quad \neg B}{\perp} (\rightarrow_c E)}$$

この体系について三点述べておく。一点目は、Prawitz [8] によれば、この体系は古典論理の自然演繹の体系に対しても、直観主義論理の自然演繹の体系に対しても保存的拡大を満たすということである。つまり、この体系で導出可能な、古典論理の論理結合子（直観主義論理と共通のものも含む）のみから表される論理式は、古典論理の自然演繹の規則からなる体系で導出可能であり、この体系において導出可能な、直観主義論理の論理結合子のみから表される論理式は、直観主義論理の自然演繹の規則からなる体系で導出可能である。さらに、論証中の新たに加えた古典論理の論理結合子に対する規則を用いたステップは、簡約可能である。実際、 $\vee_c$  の導入則と除去則に関しては以下のように簡約できる<sup>3</sup>。

$$\frac{[\neg A]_1 \quad [\neg B]_2}{\frac{\perp}{A \vee_c B} (\vee_c I)_{1,2} \quad \frac{\Pi_1 \quad \Pi_2}{\neg A \quad \neg B} (\vee_c E) \rightsquigarrow \frac{\Pi_1 \quad \Pi_2}{\neg A \quad \neg B} \perp}$$

$\rightarrow_c$  の導入則と除去則についても同様に簡約できる。

二点目は  $\rightarrow$  と  $\rightarrow_c$  の、あるいは  $\vee$  と  $\vee_c$  の関係性についてである。古典論理と直観主義論理の通常体系における関係性から考えるに、 $A \rightarrow B$  から、 $A \rightarrow_c B$  が、 $A \vee B$  から  $A \vee_c B$  がそれぞれ導出できてしかるべきである。そしてこの体系ではこれが可能である。 $A \rightarrow B$  から  $A \rightarrow_c B$  は以下のように導出可能である。

$$\frac{\frac{[A]_1 \quad A \rightarrow B}{B} (\rightarrow E) \quad \frac{[\neg B]_2}{\perp} (\neg E)}{A \rightarrow_c B} (\rightarrow_c I)_{1,2}$$

$A \vee B$  から  $A \vee_c B$  の導出も同様に可能である。一方で、 $A \rightarrow_c B$  から  $A \rightarrow B$ 、 $A \vee_c B$  から  $A \vee B$  を導出することはできない。

三点目は否定の論理結合子  $\neg$  についてである。通常自然演繹においては、直観主義論理の体系に (RAA) を加えることで、古典論理の体系を得る。つまり、この二つの論理の相違点は否定の振る舞いに集約されていることになる。しかし、Prawitz の与えた ES においては、否定結合子は古典論理と直観主義論理において同一である。通常自然演繹の体系において振る舞いが異なる  $\neg$  が ES において、古典論理と直観主義論理で共通のものでよいのか、またよいならばなぜなのか、という点は重要であろう。ちなみに、ES に (RAA) を規則として持つ古典的な否定を加えると、 $\rightarrow$  と  $\rightarrow_c$  が、 $\vee$  と  $\vee_c$  が相互に導出可能になってしまう。ES における否定結合子の扱いについては Prawitz [8] 自身も議論しているが、さらなる議論が求められる。

### 3 筆者の主張

前節では Prawitz が提案した ES について説明した。本節では、論理結合子の共存に関する、異なるアイデアを提示する。Prawitz の ES では、通常自然演繹の規則を直観主義論理の論理結合子の振る舞いを定めるものと考え、そこに古典的な論理結合子を加えた。今度は直観主義論理の論理結合子に関する規則を定め、そこに通常自然演繹の規則を、古典的な論理結合子の振る舞いを定める規則として加えることにする。本節において直観主義論理と古典論理で区別する論理結合子は含意と否定であり、それ以外の論理結合子は古典論理と直観主義論理で共通とする。直観主義論理における含意と否定を、それぞれ  $\rightarrow_i$ 、 $\neg_i$  と表記し、古典論理における含意と否定をそれぞれ  $\rightarrow_c$ 、 $\neg_c$  と表記する。

一般的には、 $\neg_i$  と  $\neg_c$  の相違点は、前者は (RAA) を認めず、後者は (RAA) を認めるという点である。しかしながら、Restall [10] が述べているように、 $\neg_i$  を含む体系に  $\neg_c$  を加えると、両者の振る舞いは同一のものになってしまう。

ゆえに、 $\neg_i$ を含む直観主義論理の体系にそのまま $\neg_c$ を加えてはならない。

古典論理の論理結合子を加える前に、直観主義論理の規則を定め直しておく必要がある、というのが本論文でのアイデアである。ここでは、 $\rightarrow_i$ について考えることにしよう。 $\rightarrow_i$ の規則を以下の二つに定め直す<sup>4</sup>。

$$\frac{\begin{array}{c} [A]_m \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \rightarrow_i B} (\rightarrow_i I)_m \dagger \quad \frac{A \quad A \rightarrow_i B}{B} (\rightarrow_i E)$$

†  $A$ 以外の仮定は、原子文か主結合子が $\neg_i$ もしくは $\rightarrow_i$ の複合文に限られる

除去則は通常の $\rightarrow$ の除去則と同一である。一方で、導入則に対し制限を加えた。このように $\rightarrow_i$ の導入則に制限を加えても、直観主義論理の証明能力は変化しない。例えば、 $A$ と $\neg_i p \vee (q \rightarrow_i r)$ のみが $B$ を導くときの解消されていない仮定であるような、通常の直観主義論理の規則で構成される論証を考えよう( $p, q, r$ はいずれも原子文)。

$$\frac{[A]_1 \quad \neg_i p \vee (q \rightarrow_i r)}{\frac{\Pi}{A \rightarrow_i B}} (\rightarrow I)_1$$

この論証での消去されていない仮定の主結合子は $\vee$ である。この論証は以下のように $(\rightarrow_i I)$ を使って導くことができる。

$$\frac{\frac{[A]_3 \quad [\neg_i p]_1}{\frac{\Pi_1}{B}} (\rightarrow_i I)_3 \quad \frac{[A]_4 \quad [q \rightarrow_i r]_2}{\frac{\Pi_2}{B}} (\rightarrow_i I)_4}{A \rightarrow_i B} (\vee E)_{1,2}}{A \rightarrow_i B}$$

ただし、 $A \rightarrow_i B$ を導出するために適用されている二つの含意の導入則の適用において、それぞれ $\neg_i p$ と $q \rightarrow_i r$ しか消去されていない仮定に含まれていないからである。この例を一般化することで、 $\rightarrow$ の導入則を $\rightarrow_i$ の導入則に制限しても直観主義論理では証明能力は変わらないことも示せる。

このように $\rightarrow_i$ の導入則を制限したうえで、 $\rightarrow_c$ を加える。 $\rightarrow_c$ は通常の $\rightarrow$ の導入則と除去則を持つ。この場合も、 $A \rightarrow_i B$ から $A \rightarrow_c B$ は導出可能であるが、その逆、 $A \rightarrow_c B$ から $A \rightarrow_i B$ は導出不可能である。ゆえにこの体系においても、Prawitz [8]が与えたESと同様、 $\rightarrow_i$ のもつ直観主義的な性質は保たれることになる。 $\neg_i$ についても並行的な議論が可能である。

なお、この体系は直観主義論理の体系の上に古典的な  $\rightarrow$  と  $\neg$  を加えた体系と見ることも、古典論理の体系の上に  $\rightarrow_i$  と  $\neg_i$  を加えた体系と見ることもできる。前者の見方の場合、局所的調和は満たされない。(RAA) は基本的に簡約不可能だからである。一方後者の見方の場合、 $\rightarrow_i$  と  $\neg_i$  は局所的調和の要請を満たす。また、いずれの見方でも全体的調和の要請は満たされる<sup>5</sup>。

#### 4 今後の展望

前節では  $\rightarrow_i$  と  $\neg_i$  の規則を制限し、そのあと  $\rightarrow_c$  と  $\neg_c$  を加えるというアイデアについて論じた。このように得られる体系の規則の中で、(RAA) は簡約不可能であり、この点が全ての規則が簡約可能である Prawitz [8] の与えた ES とは異なる点である。これは、Prawitz の ES において  $\neg$  が一種類しかないことの長所を表しているといえよう。一方、この否定に関する論点は、自然演繹が単一の結論しか持たないという事実にも関係しているだろう。実際、複数の結論を許容する一般的な推件計算においては、古典論理においてもカット除去を行うことができる。ゆえに、今後は複数の結論を許容する推件計算における、論理の共存について模索していくことが肝要となろう。

#### 注

<sup>1</sup> 正確に述べるならば、論証中の導入則の適用の直後に除去則の適用がある場合以外にも、簡約は起こりうる。しかし、本論文においては、この点はさほど重要ではない。詳しくは de Groote [2]などを参照せよ。

<sup>2</sup> (RAA) は一般に背理法と呼ばれ、 $\neg A$  から  $\perp$  が演繹されたとき、 $A$  を導出してよいという規則である。

<sup>3</sup> ただし、帰納法を可能にするために、論理式の複雑さに対する新たな基準を設ける必要がある。ここでの簡約では、消去される論理式と同じ複雑さを持った論理式が、簡約の結果現れうるからである。

<sup>4</sup>  $\rightarrow_i$  の導入則の制限のアイデアは、S4 に対応する厳密含意の振る舞いに起因する。S4 と厳密含意については、De & Omori [1]、Ishigaki & Kashima [5] を参考にした。なお、このアイデアは指導教官である佐野勝彦氏に示唆を受けた。

<sup>5</sup> del Cerro & Herzig [3] では直観主義命題論理へ古典的否定を加えた言語に対して「 $w$  で  $\neg_c A$  が充足されるのは  $w$  で  $A$  が充足されない場合でありその場合に限る」とクリプキ意味論が与えられている。本稿の直観主義命題論理に古典的否定・含意を加えた体系はこの意味論に対して健全となる。古典

命題論理の二値意味論に対する完全性と合わせて、本稿の体系は古典命題論理に対して保存的拡大となる。

## 文献

- [1] Michael De and Hitoshi Omori. Classical and empirical negation in subintuitionistic logic. In Lev Beklemishev, Stéphane Demri, and András Máté, editors, *Advances in Modal Logic, Volume 11*, pages 217–235. CSLI Publications, 2016.
- [2] Philippe de Groote. On the strong normalisation of intuitionistic natural deduction with permutation-conversions. *Information and Computation*, 178(2):441–464, November 2002.
- [3] Luis Fariñas del Cerro and Andreas Herzig. Combining classical and intuitionistic logic or: Intuitionistic implication as a conditional. In Frans Baddier and Klaus U Schulz, editors, *Frontiers of Combining Systems*, pages 93–102. Springer, March 1996.
- [4] Michael Dummett. *The logical basis of metaphysics*. Harvard University Press, [1976]1991.
- [5] Ryo Ishigaki and Ryo Kashima. Sequent calculi for some strict implication logics. *Logic Journal of the IGPL*, 16(2):155–174, April 2008.
- [6] Dag Prawitz. *Natural deduction: A Proof-Theoretical study*. Dover Publications, [1965]2006.
- [7] Dag Prawitz. Towards a foundation of a general proof theory. *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, 74:225–250, 1973.
- [8] Dag Prawitz. Classical versus intuitionistic logic. In Edward Herman Haeusler, Wagner de Campos Sanz, and Bruno Lopes, editors, *Why is this a Proof?*, pages 15–32. College Publications, June 2015.
- [9] Arthur Norman Prior. The runabout inference-ticket. *Analysis*, 21(2):38–39, 1960.
- [10] Greg Restall. Multiple conclusions. In Peter Hájek, Luis Valdés-Villanueva, and Dag Westerståhl, editors, *Logic, Methodology and Philosophy of Science Proceedings of the Twelfth International Congress*, pages 189–205. King’s College Publications, 2005.
- [11] 大西琢朗. 証明論の意味論と双側面説. 博士論文, 京都大学 文学研究科, 2012.



(北海道大学)