

ヒルベルト前期形式主義の方法論

Hilbert's Methodology in his first period of formalism

井上朋彦

Abstract

David Hilbert was the most important figure of formalism. He used the "axiomatic method" in his research on the foundations of mathematics: to axiomatize the theory and then to meta-study the conditions the axiomatic system must satisfy. Then, depending on the situation at the time, he studied the proofs of consistency in mathematics, seeking relative consistency proofs, or "direct" proofs using "early proof theory". In the standard view, Hilbert's research on mathematical foundations can be divided into two periods. This paper examines Hilbert's methodology before the establishment of "Beweistheorie" and the transition of his method for proving consistency, including the developments during 1917-20, which fall between the first and second periods of his formalism.

(1) 研究テーマ

ダフィット・ヒルベルト (David Hilbert, 1862-1943) は 19 世紀末から 20 世紀初頭の時代にかけて活躍したドイツの数学者であり、数論、代数学、幾何学、解析学、数理論理学等数学のさまざまな分野で傑出した成果を残した。数学の基礎についての研究にも精力的に取り組み、1920 年代頃には証明自体を数学的対象として扱う「証明論 *Beweistheorie*」を考案し、ゲッティンゲン大学の共同研究者等とともに数学の無矛盾性を数学内部で証明することを目指した。数学の基礎付けに対する彼らの思想的立場は一般に「形式主義」と言われる。

彼らの研究活動、いわゆる「ヒルベルト・プログラム」の最盛期は証明論提示以後の 1920 年代であるが、それ以前にもヒルベルトの数学基礎論研究は独自の研究成果を残してきた。ヒルベルトの数学の基礎に対する当初の関心は 19 世紀における数学の諸分野の発展や当時の数学の哲学の議論に喚起されたものであり、彼の研究はそうした 19 世紀数学の知的文脈の延長上にあることをまず理解しなければならない。ヒルベルトの数学基礎論研究は幾何学の研究で用いた「公理的方法 *axiomatisches Methode*」を応用する形で始まり、この方法に見られる数学の公理的提示と公理系に対するメタ研究は、

彼が一貫して持ち続けた研究態度であった。

本研究は証明論が確立される前のヒルベルトの数学基礎論研究の方法論について、先行研究を手掛かりとしてその変遷を詳細にたどったものである。

(2) 研究の背景・先行研究

以下、ヒルベルトの数学基礎論研究の時代区分と、証明論提示前の方法論について先行研究を確認する。

(2.1) ヒルベルトの数学基礎論研究の時代区分

ヒルベルトが数学基礎論研究に取り組んだ期間は 1899 年出版の『幾何学基礎論 (*Grundlagen der Geometrie*)』 [Hilbert 1899] から 1930 年代に出版されたベルナイスとの共著『数学の基礎 (*Grundlagen der Mathematik*)』 [Hilbert and Bernays 1934, 1939] までの約 40 年間である。[Sieg 1999] や [野本 2019] によると、この期間を主要著作物の出版時期に従って「前期形式主義」と「後期形式主義」という二つの時期に区分する見方が標準的であるという。前期形式主義は 1900 年の論文「数概念について (*Über den Zahlbegriff*)」 [Hilbert 1900a] から 1905 年の論文「論理学と算術の基礎について (*Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik*)」 [Hilbert 1905] までの時期である。この時期はまだ記号論理学を用いた数学の形式化は実行されておらず、自然言語で記述された公理系や「モデル」に依存したアプローチをとっていたのが特徴である。一方、後期形式主義は 1922 年の論文「数学の新しい基礎付け (*Neuebegründung der Mathematik*)」 [Hilbert 1922] から 1931 年のゲーデルの「不完全性定理」までの時期である。この時期には [Hilbert 1922] で新たに示した方法「証明論 *Beweistheorie*」を用いて数学の無矛盾性証明研究が進められたが、クルト・ゲーデル (Kurt Gödel, 1906-1978) が証明した不完全性定理により、ヒルベルト等の試みは当初の形で達成することが不可能であることが明らかとなった (cf. [野本 2019, pp. 232-233])。

(2.2) 前期と後期の中間期

上の時代区分では前期と後期の間に長い空白期間を見ることが出来るが、この期間にヒルベルトが全く数学基礎論の研究を行っていなかったわけではない。

[Mancosu 1999, 2003] は、1910 年代にヒルベルト等のゲッティンゲン大学のグループがラッセルとホワイトヘッドの共著『プリンキピア・マテマティカ (*Principia Mathematica*)』 (以下, *PM*) の研究に取り組んでいたことを伝えている。曰く、1914 年のゲッティンゲンの数学コロキウムでハインリヒ・

ベーマン (Heinrich Behmann, 1891-1970) が *PM* についての講義を行ったことをきっかけに、同コロキウムでは数理論理学や集合論といった数学基礎論に関連する講義が急増している。ベーマンは当時、ヒルベルト指導下の学生であり、*PM* を題材にした博士論文を準備していた ([Mancosu 2003, pp. 179-181])。

ヒルベルトはその業績に比して生前の出版物はそれ程多くはないため、彼に関する歴史研究で重要となるのが講義録である。[Moore 1997] は 1917/18 年冬学期にゲッティンゲン大学で行われた講義「数学の原理 (Prinzipien der Mathematik)」に注目し、この講義の意義を次の二点に集約する: (1) 命題論理の「ポスト完全性¹⁾」を初めて証明したこと、(2) 1階述語論理の形式系を初めて提示したこと。1917年頃のヒルベルトはラッセルの論理主義に接近しており、この講義の成果もそうした傾向を背景としたものである。[Sieg 1999] は、1917/18年冬学期講義に加えて1920年冬学期と夏学期の講義も考察対象に含めることで、この時期のヒルベルトが論理主義的傾向から次第に離れて構成的数論の研究を始め、やがて有限主義に基づいた証明論に至るまでの過程を検討している。

(2.3) 証明論前夜のヒルベルトの方法論

ヒルベルトが数学の基礎付けの方法として最初期から説き続けた方法は公理的方法、ないし公理論であった。[林 2000] は、ヒルベルトの公理論と 20 世紀数学の公理論との相違点に注目する。すなわち、ヒルベルトは「最初の 20 世紀数学者」でありながらも、彼の説く公理論はブルバキの「構造主義」と異なり、数学の抽象構造ではなくて統語論的な論理を強調するものである(因みに 20 世紀数学で主流となったのはブルバキの公理論であった)。ヒルベルトの公理論は数学の基礎に対する関心から要請されたものであったが、そこには「ゴルダン問題」における論争に端を発し、「解析学の算術化」や「幾何学の統一」等、19 世紀数学において主に論じられたさまざまなトピックがその背景としてあった。ヒルベルトが自身の公理的方法を用いて数学基礎論研究に本格的に取り組むようになったのは 20 世紀に入ってからであるが、彼の方法論に大きな影響を及ぼしたのは、こうした 19 世紀数学の問題群だったのである。

[Ogawa 2004] は、前期形式主義時代のヒルベルトが数学基礎論研究の方法として公理的方法を採用した理由について考察している。曰く、ヒルベルトは数学の「厳密性 rigor」を保証する手段として公理的方法が最適だと考えており、その理由は次の二点に集約される: (1) 公理系により理論を組織化することで、理論に対する理解を深めることができること、(2) 数学的判

断と数学的推論を客観化することができること。[林 2000] の説くようにヒルベルトの公理論は論理を強調するものであったが、そこにはヒルベルトは「知識の完全な論理的基礎付け」に必要な厳密性を保証する手段として公理的方法が最適だと見なしていたことがあったのである。

ヒルベルトは数学の基礎について独自のアプローチをとったが、デデキントやクロネッカーといった彼以前のアプローチの影響を受けていなかったわけではない。[Sieg 2013b] は、ヒルベルトの実数論の方法に見られる彼らの影響と相違点を考察している。数学の基礎に対するヒルベルトの最初の成果は1900年の「数概念について」であるが、そこでは『幾何学基礎論』で用いた公理的方法を応用する形で実数論を含む算術の公理系を提示している。実数概念に対するアプローチで、ヒルベルトもデデキントも幾何学的表象に訴える点は共通している ([Sieg 2013b, pp. 77-80])。しかし、無矛盾性概念の理解については両者に懸隔を見ることができる。デデキントは自然数概念を特徴づける際に、可算無限集合に相当する「一重無限システム」を構成し、それが一意に定まることを示すことで、可算無限集合が無矛盾であることを示そうとした。一方、ヒルベルトは無矛盾性概念を公理からの有限回の論理推論で矛盾が導かれないことだと捉えていたが、具体的な推論規則についてはまだ提示していなかった。これらの無矛盾性概念に対して、Sieg はデデキントの捉え方を「意味論的」だとし、ヒルベルトの捉え方を「疑似統語論的」だとしている ([Sieg 2013b, p. 81])。

その後、ヒルベルトは1904年に代数的操作を用いた純粹統語論的な無矛盾性証明の方法を発表するも²、数学的帰納法の使用についてポアンカレの批判を受け、この方法はしばらく放置される (cf. [林・八杉 2006, pp. 174-186]: [野本 2019, pp. 250-253])。1920年になると、1904年に検討したような構成的数論に再び立ち返り、夏学期講義では非常に制限された形の数論に対する無矛盾性証明も示している (cf. [Sieg 1999, pp. 111-115]: [Ewald and Sieg 2013, pp. 280-283])。1920年の構成的数論の研究は後の「有限数学 finite Mathematik」に直接的につながるものであり、ここでの研究の成果が後期最初の成果として示されることになる。

(3) 筆者の主張

ヒルベルトの数学基礎論研究は前期形式主義、後期形式主義という二つの時期に区分する見方が標準的であるものの、その区分に入らない後期直前の時期にもヒルベルトは数学基礎論研究に取り組み、独自の成果を残していた。また、証明論確立前の前期時代から、ヒルベルトはそれまでとは異なる独自

の方法、公理的方法を説き、その下で算術の無矛盾性証明を与えようと模索していた。

本論文の研究は、こうした先行研究の成果を踏まえた上で、前期・後期形式主義の狭間に当たる 1917-20 年間の取り組みも含めて、証明論確立前のヒルベルトの公理的方法を彼が公理系に求めた条件から概括し、さらに当該時期の無矛盾性証明の方法を相対的無矛盾性証明と「前期証明論」との変遷から捉え直そうとする試みである。

以下、(1) ヒルベルト前期形式主義の公理的方法の要点、(2) 証明論確立前の無矛盾性証明の方法の変遷、について紙幅の許す限り論じる。

(3.1) ヒルベルト前期形式主義の公理的方法

ヒルベルトは「数概念について」 [Hilbert 1900a] で、数概念に対するアプローチとして「生成的方法」と「公理的方法」の二つを挙げた上で、数学基礎論に対する研究では後者が優位であることを述べる ([Hilbert 1900a], pp. 180-181). ヒルベルトが生成的方法に言及する際は、デデキントやクロネッカーらの方法が念頭に置かれており、彼らの方法に内在する限界を克服するのが公理的方法であった。

ヒルベルトの公理的方法とは、幾何学や算術といった特定の理論の公理系を提示した上で、その公理系に対するメタ研究を行うことである。公理系の構築についてヒルベルトは次のように述べる：

ある科学の基礎を研究しようというときには、その科学の基礎になる基本的概念の関係を正確にかつ完全に記述する公理系をうちたてる必要がある。設定された公理は、基本的概念の定義である。
([Hilbert 1900b, pp. 299-300]: 一松訳, p. 12)

すなわち、公理とは基本的概念が定義された命題であり、公理系とはある理論を展開するための必要最小限な公理の集まりのことである。[Hilbert 1900a] では演算規則や順序関係等、数の間の関係を自然言語を用いて書き下すことで、算術の公理系が立てられた³ ([Hilbert 1900a, pp. 181-183])。

ヒルベルトは様々な言葉をもって公理系に対する条件を述べるが、それらを次の四点に集約することが出来る： i. 存在を主張する形式、ii. 諸公理の従属性・独立性証明、iii. 公理系の完全性証明、iv. 公理系の無矛盾性証明。

i. 存在を主張する形式

「存在を主張する形式」とは公理系が扱う対象についての条件であり⁴、『幾何学基礎論』 [Hilbert 1899] におけるヒルベルトの公理論の最も革新

的な点とも言える。[Hilbert 1899] では公理系の対象に関して、諸公理が規定する対象どうしの関係を満たすような事物の領域をあらかじめ仮定し、これを一つの確定した体系と見なしている。ユークリッド『原論』等、ヒルベルトより前の公理論では、点、直線、平面といった幾何学的対象は具体的な経験を基礎として個別に定義されていた。しかし、ヒルベルトはそのようなやり方とは異なり、諸公理の規定する関係を満たす集合であれば、どのような領域をとっても問題はないとした。こうして、公理系の対象について「内容」を除外して「形式」のみに注目することで、より抽象性の高い議論を行うことが可能となった。

ii. 諸公理の従属性・独立性証明

公理間の従属性・独立性とは、公理系の公理が他の公理から証明されるか、あるいはそのようなことがないのかといった概念であり、『幾何学基礎論』では幾何学の公理系をいくつかの小公理系に分割し、公理間の相互依存関係を見ることで諸公理が相互独立であることを証明した。1917年のチューリヒ講演「公理的思考」では、公理系に求められる条件として、無矛盾性証明とともに、従属性・独立性の証明が挙げられている ([Hilbert 1918, p. 148])。

iii. 公理系の完全性証明

「完全性 Vollständigkeit」はヒルベルトの数学基礎論研究において様々な使われ方をしているため、その時々で注意深く検討する必要のある概念である⁵。公理系の完全性については以下のように述べている：

この公理系の「無矛盾性」と「完全性」、つまりこれらの公理から決して矛盾が導かれないこと、またこれらの公理からすべての幾何学の定理が導かれること、この二つのことが証明されなければならない。([Hilbert 1900a, p. 181]: 寺阪・大西訳, p. 203, 強調は筆者によるもの)。

ここでヒルベルトは公理系の公理が、ある理論の任意の命題を導く上で、量的に十分であることを求めている。

iv. 公理系の無矛盾性証明

公理系の無矛盾性はこれら四つの条件の中で最重要概念である。上の引用では完全性ととともに無矛盾性についても言及されており、「これらの公理から決して矛盾が導かれないこと」とある。当時のヒルベルトの無矛盾性概念理解が、デデキントのような19世紀的な意味論的理解に対して、疑似統語論的であったのは上で確認した通りである。無矛盾性証明の方法については

次節で確認する。

(3.2) 証明論確立前の方法の変遷

証明論確立前のヒルベルトの数学基礎論の方法、とりわけ無矛盾性証明に対する方法は、相対的無矛盾性証明と「前期証明論」とを行き来するものだったと考えることが出来る。以下、その変遷を簡単に確認する。

『幾何学基礎論』の成果の一つとして幾何学の無矛盾性を実数論の無矛盾性に還元することで相対的に証明したことが挙げられる。しかし、前期時点のヒルベルトは、実数論の無矛盾性は他に還元する先がなく、その無矛盾性を「直接的」に証明する必要があると考えていた (cf. [Hilbert 1900b])。

1904年頃の算術断片に対する「無矛盾性証明」は、証明と同一視された記号列に代数的操作を施すことで、純粹統語論的にその無矛盾性証明を与えようとしたものだった。ここでとられた統語論的方法は、メタ数学と内容的数学との区別も曖昧である等、数学基礎論の手法として未成熟ではあるが、(1) 意味を排除した記号のみを用いて可算無限集合の定義を行い、(2) 数学の証明を記号の有限列と見なし、(3) 公理と推論規則のみを用いて「証明」を導出し、そこから相矛盾する結果が導かれないことを検証する等、後の証明論との共通点も見ることが出来る。このような証明論確立前にとられた純粹統語論的な証明方法を、簡単のため「前期証明論」とする。しかし、1904年の方法はポアンカレにより致命的な欠点を指摘され、挫折することになった。

1910年代になり、*PM*の研究に本格的に取り組むようになると、ヒルベルトはラッセルの論理主義に急速に接近するようになった。1917年頃には、実数論の無矛盾性はヴァイアーシュトラスやデデキントにより整数論の無矛盾性に還元されたと述べた上で、さらに整数論の無矛盾性は「論理学 *Logik*」を除いて還元する学問分野はないとしている⁶ ([Hilbert 1918, p. 153])。すなわち、ここでは『幾何学基礎論』でとった相対的無矛盾性証明が実数論に対して検討され、整数論を経て、最終的に論理学へと至っている。

しかし、後期形式主義直前の1920年頃になると、主に還元可能性公理に対する不満から論理主義的アプローチから離れ、再び前期証明論的方法を模索するようになった。この時期にヒルベルト等が中心的に研究したのが構成的数論である。さらに、1920年冬学期講義では非常に制限された自然数の体系に対して帰納法の図式を用いた無矛盾性証明が与えられている。ここでの議論は深められて翌年には講演で発表され、さらにその翌年には論文として出版された。これが「数学の新しい基礎付け」であり、ここでラッセル等の論理主義やブラウワー等の直観主義とも異なる思想的立場の方法として「証明論」を提示した。

(4) 今後の展望

以上、証明論確立前の数学基礎論におけるヒルベルトの方法を手短に論じてきたが、ここでの議論はまだまだ予備的考察の域を出ない。筆者の最大の狙いとしては、20世紀初頭の数学基礎論史を哲学史の枠内で解釈することにある。この目的の実現のためにも、未だ数理論理学を用いた方法の整備が行き届いていなかったヒルベルト前期形式主義の方法論及び数学の哲学に対する考察をより深めていくことが急務であると考えられる。

ヒルベルトの数学の哲学について今回取り上げることはできなかったが、数学的对象の存在と無矛盾性概念とを結びつけた「存在＝無矛盾性のテーゼ」や、彼が青年期から抱き続けていた「全数学問題の可解性公理」等が主要なトピックとして考えられる。また、彼特有の「完全性」概念の多義的な使い方についても、彼の数学思想との関連から議論できるかもしれない。

注

¹ ポスト完全性とは、任意の命題に対してその命題か、その命題の否定が証明できることをいう。アメリカの論理学者エミール・ポスト (Emil Leon Post, 1897-1954) に因む (cf. [野本 2019, pp. 310-312])。

² 1904年にハイデルベルクで講演を行い、翌年にその講演を基にして論文「論理学と算術の基礎について」 ([Hilbert 1905]) を発表した。

³ この場合の算術は実数論も含まれており、実数の連続性を「アルキメデスの公理」と「完全性の公理」で定義している。なお、この算術の公理系は抽象代数学で言うところのアルキメデス実数体に相当するものである。

⁴ ヒルベルト以前の公理論と差別化する形でこのような言葉が使われ始めたのは1922年以降である。なお、「存在を主張する形式」は *existentiale Form* に対する [吉田・瀧野 1993] の訳に則っている。

⁵ ヒルベルトが数学基礎論研究において「完全性 *Vollständigkeit*」に言及する際は、(1) 公理系の完全性、(2) 実数の完備性、(3) ポスト完全性、(4) 意味論的完全性、のいずれかを指しているものと考えられる。

⁶ この時期、とりわけ前期時代のヒルベルトは、*Logik* を非常に広い意味で用いているため、もちろん現代的な「論理学」の理解とは齟齬が生じる。当時の使い方に即して理解する必要があるだろう。

(5) 参考文献

林晋 [2000] 「ヒルベルトと二十世紀数学 公理主義とは何だったか?」, 『現代思想』, 2000年10月臨時増刊, 青土社, 30-41.

林晋・八杉満利子訳・解説 [2006] 『ゲーデル 不完全性定理』, 岩波文庫, 73-310.

- Hilbert, D. [1899] *Grundlagen der Geometrie*, in Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmalles in Göttingen, Teubner, pp. 1-92. 寺阪英孝・大西正男訳『幾何学の基礎』, 共立出版, 1970).
- [1900a] “Über den Zahlbegriff”, *JDMV*. Bd. 8, 1900 (『幾何学の基礎』付録VI, 共立出版).
- [1900b] “Mathematische Probleme”, Paris. Rep. in [Hilbert 1935] (一松信訳『ヒルベルト 数学の問題』, 共立出版, 1969).
- [1905] “Über die Grundlagen der Logik und Arithmetik” in *Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker-Kongress*, Teubner, pp. 174-185. (『幾何学の基礎』付録VII, 共立出版).
- [1918] “Axiomatisches Denken”, *Math. Ann*, 78: 405-15, 1918. (中村幸四郎訳『幾何学基礎論』, ちくま学芸文庫).
- [1935] *Gesammelte Abhandlungen III 2* Aufl. Springer.
- Hilbert, D. and Bernays, P. [1934] *Grundlagen der Mathematik*, Vol. I, Springer (吉田夏彦・淵野昌訳『数学の基礎』, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1993).
- [1939] *Grundlagen der Mathematik*, Vol. II, Springer.
- Mancosu, P. [1999] “Between Russell and Hilbert: Behmann on the Foundations of mathematics”, *BSL*, 5(3): 303-330, rep. in [Mancosu 2010, pp. 159-175].
- [2003] “The Russellian Influence on Hilbert and his school”, *Synthese*, 137: 59-101, rep. in [Mancosu 2010, pp. 176-198].
- [2010] *The Adventure of Reason: Interplay Between Philosophy of Mathematics and Mathematical Logic, 1900–1940*, OUP.
- Moore, G. H. [1997] “Hilbert and the emergence of modern mathematical logic”, *Theoria*, 12(1): 65-90.
- 野本和幸 [2019] 『数論・論理・意味論 その原型と展開 知の巨人たちの軌跡をたどる』, 東京大学出版会.
- Ogawa, Y. [2004] “The Pursuit of Rigor: Hilbert’s axiomatic method and the objectivity of mathematics”, *Annals of the Japan Association for Philosophy of Science*, 12(2): 89-108.
- Sieg, W. [1999] “Hilbert’s Programs 1917-1922”, *BSL*, 5: 1-44, rep. in [Sieg 2013a, pp. 91-127].

— [2013a] *Hilbert's Programs and Beyond*, OUP.

— [2013b] 'Method for real arithmetic' in [Sieg 2013a, pp. 73-90].

Ewald, W. and Sieg, W. [2013] "Introduction to the 1920 Lectures" in *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Arithmetic and Logic 1917-1933*, OUP.

(名古屋大学)