量子論理のオブザーバブル依存 Kripke 意味論
Observable-Dependent Kripke Semantics for Quantum Logic

高木　翼

Abstract

Kripke semantics for quantum logic gives a logical model of quantum mechanics. However, the traditional Kripke model for quantum logic is not rich enough to simulate quantum phenomena: the notion of observables in quantum mechanics is not taken into account for example. In this paper, we incorporate this notion into quantum logic by suggesting new kind of Kripke model called observable-dependent Kripke model. This new Kripke model is utilized to formulate quantum measurement from a logical viewpoint. Since an observable must be designated when quantum measurement is executed, it is reasonable to consider observable-dependent Kripke model for quantum measurement.

1　研究テーマ

本研究では、従来の量子論理の Kripke モデルを拡張し、オブザーバブル依存な Kripke モデルを提案することで、量子測定を論理学的に再定式化する。

2　研究の背景・先行研究

von Neumann と Birkhoff [2] によって導入された量子論理は、実験によって検証可能な論理式のみを基にして量子力学を再構築することを一つの目的としている。しかし、伝統的に「量子論理」と呼ばれてきたのは、単なるヒルベルト空間の閉部分空間がなす非分配的な束であり [8]、量子力学の様々な概念を取り込んだ量子論理が完成しているわけではない。

量子力学には、重ね合わせやエンタングルメントなどの概念に代表されるような、古典力学では説明できない興味深い概念がたくさんある。これらの概念に関連して、Schrödinger の猫のパラドックスや EPR パラドックスが考えられたように、古典力学では説明できないということが論理的な「パラドックス」であるといわれることがある。しかし、これらの概念を取り込んだ量子論理が完成すれば、これらはもはや「パラドックス」ではなく、論理的に自然な形で説明される量子力学の性質として理解されるようになるだろう。つまり、単に古典論理から脱却するだけでなく、量子論理とは何なのかということを明確にすることで、量子基礎論の論理学的地平を切り拓けるはずである。

量子論理では、分配法則の代わりに、オーソモジュラー法則という分配法則よりも弱い法則が成り立つ。この法則を分析するために、Goldblatt は、量子論理を様相論理に翻訳した [4]。実は、直観主義論理の様相論理 S4 への翻

訳 [3, 6] や古典論理の様相論理 S5 への翻訳などとは異なり、量子論理はよく知られた様相論理に翻訳されない。その理由は、オーソモジュラー性に対応する（翻訳先の様相論理の Kripke モデルから定まる）到達可能関係の性質が一階述語論理では決して記述できないからである [5]。一方で、最小量子論理もしくは直交論理 (orthologic) と呼ばれる、量子論理からオーソモジュラー法則を取り除いた論理は、Goldblatt の翻訳によって、様相論理 B に翻訳される。このように、最小量子論理の方が技術的な困難が少ないため、本研究では手始めに最小量子論理についてのみ論じる。

本稿では、量子論理の新たな Kripke モデル [1] について論じる。歴史的には、量子論理の Kripke フレームは、直交性空間 (orthogonality space) [7] として導入されたが、本稿では直交性ではなく非直交性に注目する。すなわち、組 $M = (S, R_{\not\perp})$ が量子 Kripke フレームであるとは、M が空でない状態の集合 S と反射的かつ対称的な S 上の関係 $R_{\not\perp}$ からなることをいう。

このとき、S は Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の単位ベクトル全体からなる集合 $\Sigma(\mathcal{H})$ を意図しており、$R_{\not\perp}$ は $\Sigma(\mathcal{H})$ の二つの要素が直交していないこと、すなわち $\mathcal{H}$ から定まる両者の内積が 0 でないことを意図している。このとき、内積の性質から、任意の $|\psi\rangle \in \Sigma(\mathcal{H})$ に対して $|\psi\rangle \not\perp |\psi\rangle$、かつ任意の $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle \in \Sigma(\mathcal{H})$ に対して $|\psi_1\rangle \not\perp |\psi_2\rangle$ ならば $|\psi_2\rangle \not\perp |\psi_1\rangle$ となるので、$R_{\not\perp}$ は反射的かつ対称的な関係として定義されている。量子力学の言葉を用いれば、$\Sigma(\mathcal{H})$ は純粋状態の集合、$\not\perp$ は測定による遷移可能性を表している。

以上が従来の量子 Kripke フレームの定義だが、この定義においてオブザーバブルに相当する概念は現れていない。しかし、測定を行うためには、オブザーバブルが必要なので、オブザーバブルを考慮した Kripke フレームを新たに定式化する必要がある。本稿では、オブザーバブルを考慮した Kripke モデルとして、オブザーバブル依存 Kripke モデルを提案する。

3　筆者の主張

$\mathcal{A}$ を行為を表すラベルの集合とする。ここでは、$a_1, a_2, a_3, \dots \in \mathcal{A}$ のそれぞれが、あるオブザーバブルを測定するという行為を表すものとする。古典力学では、オブザーバブルは相空間上の関数で表され、量子力学では、Hilbert 空間上の自己共役作用素で表される。

古典力学と量子力学の違いをみるために、まずは古典力学の測定を形式化する Kripke フレームを定式化する。空でない状態の集合 S と孤立した (isolated) S 上の関係からなる族 $\{\bar{R}_{a_i}\}_{a_i \in \mathcal{A}}$ の組 $\bar{F} = (S, \{\bar{R}_{a_i}\}_{a_i \in \mathcal{A}})$ のことを古典オブザーバブル依存フレーム (classical observable-dependent model) という。こ

こで、一般に S 上の関係 R が孤立しているとは、任意の $s_1, s_2 \in S$ に対して、

$$(s_1, s_2) \in R \Leftrightarrow s_1 = s_2 \tag{1}$$

となることをいう。

このとき、S は古典力学の状態からなる集合、すなわち相空間を意図しており、$\bar{R}_{a_i}$ は、あるオブザーバブル O_i の古典測定による状態の遷移可能性を意図している。古典力学では、測定によって状態は遷移しないので、$\bar{R}_{a_i}$ は孤立しているべきである。

一方で、空でない状態の集合 S と冪等 (idempotent) な S 上の関係からなる族 $\{\tilde{R}_{a_i}\}_{a_i \in \mathcal{A}}$ の組 $\tilde{F} = (S, \{\tilde{R}_{a_i}\}_{a_i \in \mathcal{A}})$ のことを量子オブザーバブル依存フレーム (quantum observable-dependent model) という。ここで、一般に S 上の関係 R が冪等であるとは、任意の $s_1, s_2, s_3 \in S$ に対して、

$$(s_1, s_2) \in R \text{ かつ } (s_2, s_3) \in R \text{ ならば } s_2 = s_3 \tag{2}$$

となることをいう。もしも R が冪等なら、任意の $s \in S$ に対して、$R(s) := \{s' \in S : (s, s') \in R\}$ は

$$R(s) = R(R(s)) \tag{3}$$

を満たす。これが R を冪等と呼ぶ理由である。特に、S が $\Sigma(\mathcal{H})$ であり、R が式 (3) を満たす $\mathcal{H}$ 上の線形作用素であれば、R は射影作用素と呼ばれる。

$\tilde{F}$ の S は、従来の量子 Kripke フレームの S と同様に、$\Sigma(\mathcal{H})$ を意図している。また、$\tilde{R}_{a_i}$ は、あるオブザーバブル O_i の射影測定による状態遷移可能性を意図している。量子力学では、古典力学とは違って、測定によって状態が遷移しうる。

$\tilde{R}_{a_i}$ が冪等性 (2) を満たすべきであるということを主張するために、まずは射影測定について述べる。射影測定とは、量子力学における理想的な測定であり、次の三つの条件を満たす。

(P1) あるオブザーバブル O_i の全ての可能な測定値は、O_i に対応する $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 A_i の固有値になっている。

(P2) $|\psi\rangle \in \Sigma(\mathcal{H})$ における A_i の測定によって測定値 m が得られたとき、状態は $P_m |\psi\rangle / \|P_m |\psi\rangle\|$ に遷移する [2]。ここで、P_m は A_i の m に対応する固有空間への（自己共役な）射影作用素とする。

(P3) $|\psi\rangle$ における測定によって測定値 m を得る確率は、$\|P_m |\psi\rangle\|^2$ である。

従来の量子 Kripke フレームの到達可能関係 $R_{\not\perp}$ は、単なる非直交関係を意図していた。(P3) によれば、$|\psi_1\rangle \not\perp |\psi_2\rangle$ であれば、$|\psi_1\rangle$ における測定によっ

て $|\psi_2\rangle$ に遷移する確率は 0 ではないので、$R_{\not\perp}$ は測定による遷移可能性を表している。

しかし、単なる非直交性だけでは、射影測定のもう一つの条件 (P2) を無視している。そこで、(P2) を反映するために、$\not\perp$ に代わる新たな関係として、オブザーバブルを伴った非直交関係 $\not\perp_{O_i}$ を

$$|\psi_1\rangle \not\perp_{O_i} |\psi_2\rangle \Leftrightarrow |\psi_1\rangle \not\perp |\psi_2\rangle \text{ かつ } |\psi_2\rangle \in E_{A_i}$$

によって定義する。ここで、E_{A_i} は、A_i の単位固有ベクトル全てからなる集合を表す。量子オブザーバブル依存 Kripke フレームの到達可能関係 $\tilde{R}_{a_i}$ は、この $\not\perp_{O_i}$ を意図している。

量子力学の観点からみれば、$\not\perp_{O_i}$ は、O_i の射影測定による遷移可能性を表している。なぜなら、(P2) にあるように、射影測定によって遷移する先の状態は、必ず A_i の単位固有ベクトルでなければならないからである。従来の到達可能関係 $R_{\not\perp}$ では、どのオブザーバブルを測定するかという点を無視していたため、$\not\perp_{O_i}$ のように、到達先の状態が A_i の単位固有ベクトルである必要はなかった。言い換えれば、$\tilde{R}_{a_i}$ は $R_{\not\perp}$ よりも量子力学における測定を忠実に定式化している。

このとき、次の命題が成り立つ。

命題 1 $S = \Sigma(\mathcal{H})$ かつ $\tilde{R}_{a_i} = \not\perp_{O_i}$ ならば $\tilde{R}_{a_i}$ は冪等になる。

証明 $\not\perp_{O_i}$ の定義から、$|\psi_1\rangle \not\perp_{O_i} |\psi_2\rangle$ かつ $|\psi_2\rangle \not\perp_{O_i} |\psi_3\rangle$ ならば $|\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle \in E_{A_i}$ となる。このとき、$|\psi_2\rangle \neq |\psi_3\rangle$ を仮定すると、Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素（ここでは、特に A_i）の単位固有ベクトルたちは $\mathcal{H}$ の正規直交基底をなすので、$|\psi_2\rangle \perp |\psi_3\rangle$ となる。しかし、これは仮定 $|\psi_2\rangle \not\perp_{O_i} |\psi_3\rangle$ に反する。一方で、$|\psi_2\rangle \not\perp_{O_i} |\psi_2\rangle$ である。よって、$|\psi_2\rangle = |\psi_3\rangle$ でなければならない。

従って、$\tilde{R}_{a_i}$ は冪等性 (2) を満たすべきである。O_i が l 重に縮退している場合（A_i の固有値に重複がある場合）でも、直交する l 個の単位固有ベクトルをとれるので、同様の議論が成り立つ。

古典オブザーバブル依存フレームの到達可能関係は孤立しており、量子オブザーバブル依存フレームの到達可能関係は冪等だった。定義から直ちに分かるように、孤立性 (1) を仮定すれば冪等性 (2) が示される。

命題 2 S 上の関係 R が孤立しているなら冪等でもある。

つまり、古典の条件が量子の条件よりも強くなるように両者は定義されている。

様相論理では、ある論理式が Kripke フレーム (S,R) で妥当であることと R が何らかの性質を満たすことが同値になる場合がある。例えば、$\Box\alpha \to \alpha$ という論理式が (S,R) で妥当であることと R が反射的であることは同値であり、$\Box\alpha \to \Box\Box\alpha$ という論理式が (S,R) で妥当であることと R が推移的であることは同値である。では、R の冪等性に対応する妥当な論理式は何だろうか。その答えは、次の命題によって示される。

命題 3 $\Box(\Diamond\alpha \to \alpha)$ が Kripke フレーム (S,R) で妥当であることと、R が冪等であることは同値である。

証明 $(\Rightarrow)$ 対偶を示す。$(s_1,s_2) \in R$ を仮定する。もしも R が冪等でなければ、$(s_2,s_3) \in R$ かつ $s_2 \neq s_3$ を満たすような $s_3 \in S$ が存在する。このとき、付値関数 V をある原子論理式 p に対して $V(p) = \{s_3\}$ となるように選ぶ。すると、この V から誘導される Kripke モデル $M = (S,R,V)$ に対して、$(M,s_1) \not\models \Box(\Diamond p \to p)$ となるので、$\Box(\Diamond p \to p)$ は (S,R) で妥当ではない。

$(\Leftarrow)$ M を任意の Kripke モデル (S,R,V) とする。このとき、$(s_1,s_2) \in R$ を満たす任意の $s_2 \in S$ に対して、$(M,s_2) \models \Diamond\alpha \to \alpha$ となることを示せばよい。もしも $(M,s_2) \models \Diamond\alpha$ ならば、ある $s_3 \in S$ が存在して $(s_2,s_3) \in R$ かつ $(M,s_3) \models \alpha$ となるが、R は冪等なので、s_2 は s_3 に等しくなければならない。よって、$(M,s_2) \models \alpha$ となるので、$(M,s_2) \models \Diamond\alpha \to \alpha$ を得る。

量子オブザーバブル依存 Kripke モデルが従来の量子論理の Kripke モデルよりも優れている点は、量子力学における完全性関係 [3] を論理学で扱えるという点である。完全性関係とは、単位作用素 I を射影作用素によって分解できるという性質のことである。すなわち、$\mathrm{Spec}(A_i)$ で A_i のスペクトルを表したとき、

$$\sum_{m \in \mathrm{Spec}(A_i)} P_m = I$$

という関係のことを完全性関係という。この関係を用いれば、任意の $|\psi\rangle \in \Sigma(\mathcal{H})$ に対して

$$\sum_{|\psi'\rangle \in E_{A_i}} |\langle\psi'|\psi\rangle|^2 = \sum_{m \in \mathrm{Spec}(A_i)} \|P_m|\psi\rangle\|^2 = 1 \tag{4}$$

となるので、$|\psi\rangle$ において O_i を測定して何らかの測定値を得る確率は 1 となる。完全性関係はオブザーバブルを考えるからこそ意味をもつ関係なので、オブザーバブルを考えない従来の量子論理の Kripke モデルでは、完全性関係を扱うことはできない。

式 (4) が論理学においてどのような役割を果たすのかをみるために、量子オブザーバブル依存 Kripke フレーム $\tilde{F} = (S, \{\tilde{R}_{a_i}\}_{a_i \in \mathcal{A}})$ に対応する様相論理として、（量子）オブザーバブル依存論理を定式化する。オブザーバブル依存論理の論理式全体 $\mathcal{L}_{\mathrm{QOD}}$ は、以下の文法によって生成される。

$$\alpha ::= p \mid \alpha \wedge \alpha \mid \alpha \to \alpha \mid \Box_{a_i}\alpha, \quad (a_i \in \mathcal{A}).$$

ここで、p は任意の原子論理式を表す。このとき、各原子論理式に S の部分集合を割り当てる関数 V のことを付値関数といい、組 $\tilde{M} = (S, \{\tilde{R}_{a_i}\}_{a_i \in \mathcal{A}}, V)$ のことを量子オブザーバブル依存モデルという。$\tilde{M}$ を構成する S から定まる $s \in S$ において $\alpha \in \mathcal{L}_{\mathrm{QOD}}$ が充足可能であるということを $(\tilde{M}, s) \models \alpha$ と表記すると、充足可能関係 $\models$ は以下のようにして定義される。

1. $(\tilde{M}, s) \models p :\Leftrightarrow s \in V(p)$ となる。
2. $(\tilde{M}, s) \models \alpha_1 \wedge \alpha_2 :\Leftrightarrow (\tilde{M}, s) \models \alpha_1$ かつ $(\tilde{M}, s) \models \alpha_2$ となる。
3. $(\tilde{M}, s) \models \alpha_1 \to \alpha_2 :\Leftrightarrow (\tilde{M}, s) \models \alpha_1$ ならば $(\tilde{M}, s) \models \alpha_2$ となる。
4. $(\tilde{M}, s) \models \Box_{a_i}\alpha :\Leftrightarrow (s, s') \in \tilde{R}_{a_i}$ を満たす任意の $s' \in S$ に対して、$(\tilde{M}, s') \models \alpha$ となる。

このとき、$\Box_{a_i}$ のことを必然性演算子といい、$(\tilde{M}, s) \models \Box_{a_i}\alpha$ は、量子力学のオブザーバブル O_i を測定した後に必ず α が成り立つということを意図している。以下では、$[\![\alpha]\!]$ で $\{s \in S : (\tilde{M}, s) \models \alpha\}$ を表すことにする。

$\Box_{a_i}$ の意味を考えれば、$(\tilde{M}, s) \models \Box_{a_i}\alpha$ であることと、s において O_i を測定した後に α が成り立つ確率が 1 であることは同値になるべきである。実際、両者が同値であることが完全性関係から示される。

命題 4 $S = \Sigma(\mathcal{H})$ かつ $\tilde{R}_{a_i} = \not\perp_{O_i}$ とする。このとき、

$$\sum_{|\psi'\rangle \in E_{A_i} \cap [\![\alpha]\!]} |\langle \psi' | \psi \rangle|^2 = 1$$

と $(\tilde{M}, |\psi\rangle) \models \Box_{a_i}\alpha$ は同値である。

証明 $\tilde{R}_{a_i}(|\psi\rangle) := \{|\psi'\rangle \in \Sigma(\mathcal{H}) : (|\psi\rangle, |\psi'\rangle) \in \tilde{R}_{a_i}\}$ とする。式 (4) から

$$\sum_{|\psi'\rangle \in E_{A_i}} |\langle \psi' | \psi \rangle|^2 = \sum_{\substack{|\psi'\rangle \in E_{A_i} \\ |\psi'\rangle \not\perp |\psi\rangle}} |\langle \psi' | \psi \rangle|^2 = \sum_{|\psi'\rangle \in \tilde{R}_{a_i}(|\psi\rangle)} |\langle \psi' | \psi \rangle|^2 = 1$$

となる。従って、

$$\sum_{|\psi'\rangle \in E_{A_i} \cap [\![\alpha]\!]} |\langle \psi' | \psi \rangle|^2 = 1 \Leftrightarrow \sum_{\substack{|\psi'\rangle \in E_{A_i} \cap [\![\alpha]\!] \\ |\psi'\rangle \not\perp |\psi\rangle}} |\langle \psi' | \psi \rangle|^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{|\psi'\rangle \in \tilde{R}_{a_i}(|\psi\rangle) \cap [\![\alpha]\!]} |\langle \psi' | \psi \rangle|^2 = 1 \Leftrightarrow \tilde{R}_{a_i}(|\psi\rangle) \cap [\![\alpha]\!] = \tilde{R}_{a_i}(|\psi\rangle)$$

$$\Leftrightarrow \tilde{R}_{a_i}(|\psi\rangle) \subseteq [\![\alpha]\!] \Leftrightarrow (\tilde{M}, |\psi\rangle) \models \Box_{a_i} \alpha$$

を得る。

この命題 4 は、量子力学の定量的表現（確率が 1 であること）と量子オブザーバブル依存論理の定性的表現（必然的であること）の対応関係を与えている。もしも論理側でも定量的な表現を扱いたければ、確率をそのまま真理値とみなす無限多値論理を導入するか、到達可能関係を確率でラベル付けするといった方法が考えられる。

4　今後の展望

本稿で定式化したオブザーバブル依存 Kripke 意味論では、オブザーバブルの概念を量子論理に取り入れたが、その他の豊富な量子力学の概念を論理によって定式化するという課題が残されている。具体的には、

- 異なるオブザーバブルの連続測定
- 量子系の合成系およびエンタングルメント [4]
- 純粋状態ではない量子状態、すなわち混合状態
- 射影測定を一般化した POVM 測定

などの論理による定式化が考えられる。

また、その過程で定式化した新たな量子論理の量子計算への応用も今後の課題として挙げられる。

注

[1] 論理の Kripke 意味論を考えるとは、その論理の Kripke モデルを与えるということである。今回は、特に量子論理の Kripke モデルを与えるが、この Kripke モデルは、量子力学のモデルになっている。「モデル」という言葉が示唆するように、量子力学のどの部分をモデル化するかに応じて様々な Kripke モデルを与えることができる。また、一般に論理には様々な意味論があり、von

Neumann と Birkhoff [2] による量子論理は、代数的意味論に基づいて導入された [8]。

[2] たとえ $P_m |\psi\rangle$ のノルムが 1 ではないとしても、$P_m |\psi\rangle / \|P_m |\psi\rangle\|$ のノルムは 1 になる。よって、$P_m |\psi\rangle / \|P_m |\psi\rangle\| \in \Sigma(\mathcal{H})$ となるので、$P_m |\psi\rangle / \|P_m |\psi\rangle\|$ は新たな純粋状態となる。

[3] 論理学における完全性（任意の恒真論理式は証明可能であるという性質）とは無関係である。

[4] [1] では、量子論理を発展させた動的量子論理の枠組みで量子系の合成系やエンタングルメントを扱っている。しかし、本稿のようにオブザーバブルを明示的には扱っていないので、今後は、動的量子論理と本稿で提案したオブザーバブル依存論理を組み合わせることで、合成系・エンタングルメントとオブザーバブルの概念を同時に形式化した論理を定式化するという方針が考えられる。

文献

[1] A. Baltag and S. Smets. LQP: the dynamic logic of quantum information. *Mathematical structures in computer science*, 16(3):491–525, 2006.

[2] G. Birkhoff and J. von Neumann. The logic of quantum mechanics. *Annals of mathematics*, 57(4):823–843, 1936.

[3] K. Gödel. Eine interpretation des intuitionischen aussagenkalküls. *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiumus*, 4:39–40, 1933.

[4] R. I. Goldblatt. Semantic analysis of orthologic. *Journal of Philosophical Logic*, 3:19–35, 1974.

[5] R. I. Goldblatt. Orthomodularity is not elementary. *The Journal of Symbolic Logic*, 49(2):401–404, 1984.

[6] J. C. C. McKinsey and A. Tarski. Some theorems about the sentential calculi of lewis and heyting. *Journal of Symbolic Logic*, 13:1–15, 1933.

[7] C. H. Randall and D. J. Foulis. Lexicographic orthogonality. *Journal of combinatorial theory*, 11:157–162, 1971.

[8] M. Rédei. *Quantum logic in algebraic approach*, volume 91 of *Fundamental Theories of Physics*. Springer, 1998.

（北陸先端科学技術大学院大学）