不完備アウェアネスゲームにおける均衡の論理的分析
Logical Analysis of an Equilibrium in Game with Incomplete Awareness

久保埜　雄大

Abstract

Game situations with incomplete awareness/unawareness among the players have been explored in the context of the analysis of bounded rationality. Besides, logic has been long used to describe and analyze agents' epistemic assumptions, including rationality in several fields. In this paper, we introduce logic of awareness to analyze rationality in a game with incomplete awareness/unawareness. As for the main achievement, we prove that an equilibrium in the games always satisfies the logical formula characterizing rationality. This study clarifies rationality in a game with bounded rationality, intending to contribute epistemic foundation programs in game theory.

1　研究テーマ

本研究では、認識論理の一種であるアウェアネスの論理 (logic of awareness) を使用し、不完備アウェアネスゲーム (game with incomplete awareness) の均衡点が保持する合理性に関する性質を公理的に定式化する。

2　研究の背景・先行研究

ゲーム理論は特定の状況における合理的行動の解明を目的としており、ゲームの前提と複数のプレイヤー間の推測に基づくゲームの結果、つまりゲームの解の分析は主要な研究軸である。ナッシュによって戦略型ゲームの解として均衡点が示されてから、展開型ゲームや不完全情報ゲーム [1] などの、より複雑なゲームの均衡点が提示されてきた。さらにその存在性や精緻化などの分析が行われてきた。その中で、プレイヤーに仮定されている合理性 (rationality) の現実とのギャップの指摘は古くから存在する [1]。このような限定合理性 (bounded rationality) に関する研究は、進化ゲーム理論や行動ゲーム理論といった領域を構成するに至った。これらでは実験研究を通して推論能力の限界や互恵性 (reciprocity) などの従来の合理性とのギャップを発見し、新たなモデルを構築している。一方で、均衡点や推論が必要とする合理性の分析という、いわば実験を通した研究とは逆向きの方向で限定合理性にアプローチする研究が存在する [2, 3, 4, 5]。これらは合理性に関するどの理想化が解概念の成立に影響を与えるのかを明らかにするものであり、その意味で限定合理性の理論へ貢献する。また本稿は上記の中でも、一般の戦略型ゲームにおける被支配戦略の逐次消去法 (iterated deletion of strictly dominated strategies) [2] を特徴づける合理性を提示した Bonanno [4] の道具立てを多く使用する。

この文脈の中で、本稿では各種ゲームの中でも不完備アウェアネスゲームにおける均衡点が保持する合理性について、アウェアネスの論理を使って公理的に定式化する。不完備アウェアネスゲームは他のプレイヤーの存在やプレイヤーのとり得る選択などのゲームのルールと呼ばれる前提について、プレイヤーのアウェアネスが欠けているようなゲームを指す。ここではアウェアネスには「対象に気づく」や「対象へ意識を向ける」といった解釈を当て、その対象はプレイヤーの思考に使用できる情報のことを指す。例えば将棋や囲碁などがこのゲームの例といえ、これは相手のとる戦略全てを常に意識し続けているわけではないからである。つまり不完備アウェアネスゲームとは、プレイヤーは自身や他のプレイヤーがとり得る選択などを常に意識できるわけではないという限定合理性を仮定したゲームであり、企業の意思決定など多くのプラクティカルな具体例が考えられる重要なゲームといえる。同じ不完備アウェアネスゲームであっても、不完備情報も同時に扱えるものなど、より一般化された形式化も存在する [6, 7]。しかし今回は手始めに完全完備情報不完備アウェアネスゲームを取り扱った Feinberg [8] の形式化を使用し、さらに選択に関する気づきにのみに焦点を当てる。また [8] は各行動の選択に対する確率分布自体を戦略として採用する混合戦略 (mixed strategy) を用いているが、同様の理由から純粋戦略 (pure strategy) に限定し議論を進めることとする。このような単純化を行った不完備アウェアネスゲーム $\Gamma^{\mathcal{U}}$ は戦略型ゲーム Γ とアウェアネス/アンアウェアネス構成 (awareness/unawareness constructiion) $\mathcal{U}$ の組として定義される。Γ は組 $\langle \mathcal{I}, \{S_i\}_{i\in\mathcal{I}}, \{\pi_i\}_{i\in\mathcal{I}} \rangle$ であり、それぞれ $\mathcal{I}$ はプレイヤーの有限集合、S_i はプレイヤー i の戦略の集合、$\pi_i : S \to \mathbb{R}$ は i の利得関数である。ただし $S \coloneqq \prod_{i\in\mathcal{I}} S_i$ である。$\mathcal{U}$ は全プレイヤーの戦略の集合 $\alpha \coloneqq \bigcup_{i\in\mathcal{I}} S_i$ の部分集合として、各 θ に依存し与えられる気づきの状態にある戦略の集合の族 $\{\alpha_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ である。ただし $\Theta \coloneqq \bigcup_{i=0}^{n} (\mathcal{I})^i$ とし、かつ以下の二つの条件を満たす。なお $\alpha_{\{\emptyset\}} \coloneqq \alpha$ とする。

1. $\theta \succeq \theta'$ ならば $\alpha_\theta \subseteq \alpha_{\theta'}$ である。ただし $\theta \succeq \theta'$ は、θ と θ' をそれぞれ $(i_1, \cdots, i_n)$ と $(i_{k_1}, \cdots, i_{k_m})$ としたとき、$1 \leq k_1 < \cdots < k_m \leq n$ とする。

2. $i_k = i_{k+1}$ となる $\theta = (i_1, \cdots, i_k, i_{k+1}, \cdots, i_n)$ と $\theta' = (i_1, \cdots, i_{k-1}, i_{k+1}, \cdots, i_n)$ について、$\alpha_\theta = \alpha_{\theta'}$ である。

例えば $\theta = (1, 2, 3)$ のとき $\alpha_{(1,2,3)}$ は、「プレイヤー 1 が気づいている「プレイヤー 2 が気づいている「プレイヤー 3 が気づいている全プレイヤーの戦略の集合」」」を表す。また θ はゲームの制限に使用することができ、Γ_θ および $\mathcal{U}^\theta$ が定義できる。Γ_θ は $\langle \mathcal{I}, \{S_i^\theta\}_{i\in\mathcal{I}}, \{\pi_i\}_{i\in\mathcal{I}} \rangle$ で、$S_i^\theta \coloneqq S_i \cap \alpha_\theta$ である。$\mathcal{U}^\theta$

は $\{\alpha_{\theta\cdot\theta'}\}_{\theta'\in\Theta}$ で、なお $\theta\cdot\theta'$ は θ と θ' の連接である。また [8] はゲームの解概念として拡張ナッシュ均衡 (extended Nash equilibrium) が提示した。これは上記の単純化の元で、各 $\theta=(i_1,\cdots,i_n)$ について、以下の二つの条件を満たす純粋戦略 $s^{\theta}_{i_n}\in S^{\theta}_{i_n}$ を割り当てる。

1. $s^{\theta}_{i_n}$ が $\{s^{\theta\cdot j}_j\}_{j\in\mathcal{I}\setminus\{i_n\}}$ に対する最適反応である。
2. 最後のプレイヤーが一致する θ,θ' について、もし $\Gamma^{\mathcal{U}^{\theta}}_{\theta}=\Gamma^{\mathcal{U}^{\theta'}}_{\theta'}$ ならば、$s^{\theta}_i=s^{\theta'}_i$ である。

なおプレイヤー i のある戦略 s_i が他のプレイヤーの戦略 $\{s_j\}_{j\in\mathcal{I}\setminus\{i\}}$ に対する最適反応であるとは、全ての $s'_i\in S_i$ について、$\pi_i(s_i,(s_j)_{j\in\mathcal{I}\setminus\{i\}})\geq\pi_i(s'_i,(s_j)_{j\in\mathcal{I}\setminus\{i\}})$ が成立することをいう。条件 2 はプレイヤーの気づきの状態が同じであるならば、拡張ナッシュ均衡である戦略も同じであると解釈される。戦略組としてこの概念を表現するならば、各 $\theta\cdot i$ について、拡張ナッシュ均衡として割り当てられる戦略の組 $(s^{\theta\cdot i}_i)_{i\in\mathcal{I}}$ を、$\Gamma^{\mathcal{U}^{\theta}}_{\theta}$ の拡張ナッシュ均衡点と呼ぶことができる。

認識論理の一種であるアウェアネスの論理は、論理的全能性 (logical omniscience)[3] を排除した現実の思考に近いような推論の表現を目的として、コンピュータサイエンス・経済学・哲学の各領域に跨って発展してきた [9]。不完備アウェアネスゲームともアウェアネスの概念の記述という点で交わってきた [10]。また論理を使用した定式化は、今後の拡張性において利点である。すなわち均衡点のように静的なものだけでなく、[5] で示されたように Max-Min 戦略 [4] などの特定の性質をもつ戦略を選ぶという意思決定に必要な合理性を射程に入れる際に、推論規則という形で意思決定手続きを取り扱うことができる。アウェアネスの論理にはゲームの形式化と同様に複数の論理が存在するが、今回は Awareness Logic with Partition ($\mathcal{ALP}$) [11] を使用する。これは情報に対する気づきだけでなく、その気づきに応じて変化するエージェントの視点を考慮した論理である。マルチエージェント間における推論を正しく扱うためのもので、ゲーム理論のような他人の思考を推測し、均衡点を見つけることを目的とするものの分析に適している。しかしながらゲーム理論への応用は主目的としてないため、三階以上の高階の気づき (higher order awareness) 、すなわち「プレイヤー 1 が気づいている「プレイヤー 2 が気づいている「プレイヤー 3 が気づいている戦略」」」といった気づきの表現ができない。この拡張は今後の課題とし、今回は手始めに二階の気づきに限定した不完備アウェアネスゲームにおける均衡点の性質としての合理性の公理的な定式化を提示する。

3　筆者の主張

論理体系 $\mathcal{ALP}$ と [4] の戦略の論理的表現をベースとし、前章の不完備アウェアネスゲームに依存した新たな論理 $\mathcal{ALPG}$ を導入する。$\mathcal{P}$ を原子命題の集合とし、$\mathcal{ALPG}$ の言語 $\mathcal{L}_\mathcal{P}$ は以下の文法

$$\mathcal{L}_\mathcal{P} \ni \varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \mathrm{A}^i_j\varphi \mid [\equiv]^i_j\varphi \mid \mathrm{C}^i_j\varphi \mid \mathrm{K}^i_j\varphi \mid \mathrm{CK}^i\varphi$$

によって生成される。ただし $p \in \mathcal{P}$ であり、さらに $\mathcal{P}$ は特別な命題の集合

$$\bigcup_{i\in\mathcal{I}} S_i \cup \bigcup_{i\in\mathcal{I}} \{s_i \succeq_i s'_i \mid s_i, s'_i \in S_i\}$$

である。これらの特殊な原子命題はそれぞれ「s_i を選択する」と「i にとって s_i が s'_i よりも利得が少なくとも同程度に高い」を意味する。また $s_i \succ_i s'_i$ は $s'_i \not\succeq_i s_i \wedge s_i \succeq_i s'_i$ の略記とする。それぞれ $\mathrm{A}^i_j\varphi$ は「i の視点で j が φ に気づいている」、$\mathrm{K}^i_j\varphi$ は「i の視点で j が φ に気づいていて、かつ知っている」、$\mathrm{CK}^i\varphi$ は「i の視点で φ は意識下にある共有知識である」と読む。共有知識とは、「ある命題を全てのエージェントが知っており、かつそのことも全てのエージェントが知っており $\cdots$」が無限回続くことで表現される知識のことである。これは「ある命題を全員が知っている」だけでは不十分であり、そのことに対する相互認識が必要とされる。他のオペレータ $[\equiv]^i_j$ と C^i_j は上記 K^i_j オペレータの定義に使用する。他の論理演算子について $\varphi \vee \psi$ と $\varphi \to \psi$ は、それぞれ $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ と $\varphi \wedge \neg\psi$ の略記とする。

次にセマンティクスを与える認識モデル M を定義する。M は組

$$\langle W, \{R_i\}_{i\in\mathcal{I}}, \{\mathscr{A}^i_j\}_{i,j\in\mathcal{I}}, \{\equiv^i_j\}_{i,j\in\mathcal{I}}, \{\sigma^i_j\}_{i,j\in\mathcal{I}}, \rangle$$

であり、それぞれ以下のように定義される。

- W は空でない可能世界の集合。
- $R_i \subseteq W \times W$ は同値関係。
- $\mathscr{A}^i_j$ は空でない原子命題の集合。ただし $\mathcal{U}$ 内の (i,j) に対応する要素 $\alpha_{(i,j)}$ について、$\alpha_{(i,j)} \subseteq \mathscr{A}^i_j$ を満たす。
- $(w,v) \in \equiv^i_j$ となるのは、全ての $p \in \mathscr{A}^i_j$ に関して $w \in V(p)$ のとき、またそのときに限り $v \in V(p)$ が成立するときである。
- $\sigma_i : W \to S_i$ は写像であり、$(w,w') \in (R_i \circ \equiv^i_i)^+$ について $\sigma_i(w) = \sigma_i(w')$ を満たす。ただし関係 R^+ は R の推移閉包とし、$R_i \circ \equiv^i_i$ は関係 $\equiv^i_i$ と R_i の合成とする。

なお関係 R の推移閉包 R^+ とは、R を含み推移性をもつ関係の最小の集合であり、関係 R' と R の合成は $\{(x,y) \mid$ ある z が存在して、$(x,z) \in R'$かつ $(z,y) \in R\}$ である。R_i は全ての命題に気づいている理想化されたエージェント i が考え得る可能性を示す。$\mathscr{A}^i_j$ は i 視点の j に関するアウェアネス集合 (awareness set) であり、気づいている原子命題の集合を意味する。$\equiv^i_j$ は気づいている命題に関しては区別がつかない二つの可能世界の間に引かれる同値関係である。R_i と組み合わせることで、気づきの欠けが原因で思考が制限されることを反映する。$\sigma_i(w)$ は w で選択される戦略を示し、定義後半の条件はエージェントは自身が選んだ戦略を常に知っていることを表す。

$\mathrm{At}(\varphi)$ を φ に登場する原子命題の集合、関係 R の反射推移閉包を R^* とする。なお反射推移閉包は R を含み、反射性かつ推移性をもつ関係の最小の集合である。このとき充足関係は以下のように定義される。

- $M, w \vDash s_i \Leftrightarrow s_i = \sigma_i(w)$.
- $M, w \vDash s_i \succeq_i s'_i \Leftrightarrow \pi_i(s_i, (\sigma_j(w))_{j \in \mathcal{I} \setminus \{i\}}) \geq \pi_i(s'_i, (\sigma_j(w))_{j \in \mathcal{I} \setminus \{i\}})$.
- $M, w \vDash \neg\varphi \Leftrightarrow M, w \nvDash \varphi$.
- $M, w \vDash \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow M, w \vDash \varphi$ かつ $M, w \vDash \psi$.
- $M, w \vDash \mathrm{A}^i_j \varphi \Leftrightarrow \mathrm{At}(\varphi) \subseteq \mathscr{A}^i_j$.
- $M, w \vDash [\equiv]^i_j \varphi \Leftrightarrow (w, v) \in \equiv^i_j$ となる全ての v について、$M, v \vDash \varphi$.
- $M, w \vDash \mathrm{C}^i_j \varphi \Leftrightarrow (w, v) \in (R_j \circ \equiv^i_j)^+$となる全ての v について、$M, v \vDash \varphi$.
- $M, w \vDash \mathrm{K}^i_j \varphi \Leftrightarrow M, w \vDash \mathrm{A}^i_j \varphi$ かつ $M, w \vDash \mathrm{C}^i_j \varphi$.
- $M, w \vDash \mathrm{CK}^i \varphi \Leftrightarrow M, w \vDash \mathrm{A}^i_i \varphi$ かつ $(w, v) \in (\bigcup_{j \in \mathcal{I}} (R_j \circ \equiv^i_j)^+)^*$となる全ての v について、$M, v \vDash \varphi$.

特殊な原子命題 s_i について、前述のとおり「s_i を選択する」という意味であるため、$M, w \vDash s_i$ で「w で s_i が選択される」という解釈がされる。関係 R_j と $\equiv^i_j$ の合成の推移閉包をとった $(R_j \circ \equiv^i_j)^+$ は同値関係になるため、可能世界群の新たな分割を与える。これはエージェントが気づいていないために区別ができない可能世界群が、同値類として潰されることを示す。このように分割を粗くすることで、「エージェント 1 は「エージェント 2 が p を知っている」ことを知っている」のような推測を、気づきによる思考への影響を加味した上で正しく扱うことができる。CK^i オペレータは反射推移閉包を取る対象を $(R_j \circ \equiv^i_j)^+$ としたもので、気づきによって制限されるエージェントの思

考による共有知識に対応するオペレータとなっており、通常のものの自然な拡張となっている。

続いて、[4] で提案された公理系を参考に、戦略に関するいくつかの前提を表現する論理式

$$\mathbf{G_1}: s_{i_1} \vee \cdots \vee s_{i_m}, \quad \mathbf{G_2}: \neg(s_i \wedge s_i'),$$
$$\mathbf{G_3}: s_i \to \mathrm{K}_i^i s_i, \quad \mathbf{G_4}: s_i \succeq_i s_i' \vee s_i' \succeq_i s_i$$

を妥当な論理式として導入する。本稿では証明論についてはふれないため、詳細な証明はしないが、写像 σ_i および利得関数の定義から、任意の M について恒真な論理式となる。それぞれ $\mathbf{G_1}$ は「プレイヤーは必ず選択をする」、$\mathbf{G_2}$ は「プレイヤーは同時に二つの戦略を選択できない」、$\mathbf{G_3}$ は「プレイヤーは自身が選択した戦略を知っている」、$\mathbf{G_4}$ は「プレイヤーの選好関係について連結的である」を意味する。

合理性の共有知識とは、それぞれのプレイヤーの選択が合理的であることの共有知識をいう。合理性の形式化はその強度に合わせていくつか存在する [4] が、これらをベースに「プレイヤー i がある戦略 s_i をとるとき、i は他のプレイヤーの戦略に対して、s_i よりも常に優れている他の戦略 s_i' を知らない」を合理性として考えれば、j の視点で戦略 s_i が合理的であることは以下の論理式で形式化できる。

$$\mathbf{R}: \bigwedge_{k \in \mathcal{I}} (s_k \wedge \mathrm{A}_k^j s_k) \to \neg \mathrm{K}_i^j s_i' \succ_i s_i$$

これは「他のプレイヤーが実際にとることになる戦略がプレイヤー j の意識下にあるという条件の下で、同じく j が気づいている i の他の戦略について、i が実際にとることになる戦略よりも真に優れていることを j 視点での i は知らない」という意味になる。戦略 s_i が合理的であることが j の視点での共有知識であることは、以下の論理式で形式化される。

$$\mathbf{CR}: \bigwedge_{k \in \mathcal{I}} (s_k \wedge \mathrm{A}_k^j s_k) \to \neg \mathrm{CK}^j s_i' \succ_i s_i$$

前章で述べたように、本稿では二階の気づきに限定した不完備アウェアネスゲームについて分析を行う。これは任意の $\theta = (i_1, \cdots, i_n)$ について $\alpha_\theta = \alpha_{(i_1, i_n)}$ の条件を加えることで表現できる。これは例えば「プレイヤー 1 視点での「プレイヤー 2 視点での「プレイヤー 3 の気づきの状態」」」が、「プレイヤー 1 視点での「プレイヤー 3 の気づきの状態」」と一致するという状況への制限を意味する。

命題. 二階の気づきをもつ不完備アウェアネスゲーム $\Gamma^{\mathcal{U}}$ について、$(\sigma_i(w))_{i\in\mathcal{I}}$ が拡張ナッシュ均衡であるならば、$M, w \vDash \mathbf{CR}$ である。

証明. 前提より、各 $\theta = (i_1, \cdots, i_n)$ について $\sigma_{i_n}(w) \in S_{i_n}^{(i_1,\cdots,i_n)} = S_{i_n} \cap \mathscr{A}_{i_n}^{i_1}$ が $\{s_j^{(i_1,\cdots,i_n)\cdot j}\}_{j\in\mathcal{I}\setminus\{i_n\}}$ に対して最適反応である。ゲームは二階の気づきに制限されているため、$s_j^{(i_1,\cdots,i_n)\cdot j} = s_j^{(i_1,j)} = \sigma_j(w)$. よって全ての $s'_{i_n} \in S_{i_n}$ について $\pi_{i_n}(\sigma_{i_n}(w), (\sigma_j(w))_{j\in\mathcal{I}\setminus\{i_n\}}) \geq \pi_{i_n}(s'_{i_n}, (\sigma_j(w))_{j\in\mathcal{I}\setminus\{i_n\}})$ である。$\mathbf{CR}$ の前件である $M, w \vDash \bigwedge_{k\in\mathcal{I}}(s_k \wedge \mathrm{A}_k^{i_1} s_k)$ と s_{i_n} の充足関係の定義から、$M, w \vDash s_{i_n} \succeq_{i_n} s'_{i_n}$. 次に $M, w \vDash \mathrm{CK}^{i_1} s'_{i_n} \succ_{i_n} s_{i_n}$ を仮定する。よって $(w, v) \in (\bigcup_{k\in\mathcal{I}}(R_k \circ \equiv_k^{i_1})^+)^*$ となる全ての v について、$M, v \vDash s'_{i_n} \succeq_{i_n} s_{i_n} \wedge s_{i_n} \not\succeq_{i_n} s'_{i_n}$ となる。しかし $(\bigcup_{k\in\mathcal{I}}(R_k \circ \equiv_k^{i_1})^+)^*$ は反射的であるため、$M, w \vDash s'_{i_n} \succeq_{i_n} s_{i_n} \wedge s_{i_n} \not\succeq_{i_n} s'_{i_n}$. これは $M, w \vDash s_{i_n} \succeq_{i_n} s'_{i_n}$ と矛盾する。したがって、$M, w \vDash \neg\mathrm{CK}^{i_1} s'_{i_n} \succ_{i_n} s_{i_n}$.

この命題は $\mathbf{R}$ で特徴づけられる合理性の共有知識 $\mathbf{CR}$ の成立が、拡張ナッシュ均衡点の成立の必要条件となっていることを示す。

4 今後の展望

本稿では特殊な状況における不完備アウェアネスゲームの均衡点の認識論的前提を示した。しかしながら本文中でもふれたように、いくつかの課題が残されている。具体的には、

- 拡張ナッシュ均衡点の必要十分条件となる合理性に対応する公理の発見
- 完全性定理を満たす証明体系の構築
- 二階の気づきに限定しないゲームの分析
- 混合戦略への拡張

などが考えられる。また長期的な展望としては、合理性以外の認識論的前提の定式化や、特定の性質をもつ戦略を選ぶ意思決定段階において必要な前提の分析が挙げられる。

均衡点や戦略の決定プロセスが、どの程度の認識論的前提に基づいているのかを形式的に示すことで、プレイヤーの認識構造などのゲームの前提を明らかにすることができる。この意味でゲーム理論への貢献ができると考えられる。

注

[1] プレイヤーが同時に意思決定をしない動学ゲームにおいて、過去に行われた少なくとも一つの意思決定の内容がプレイヤー全員に共有されない場合、不完全情報ゲームと呼ばれる。似た概念に不完備情報ゲームがあるが、これはゲームの前提となるプレイヤーの数やとり得る戦略などの情報がプレイヤー全員に共有されないゲームを指す。

[2] ゲームから被支配戦略 (他のプレイヤーがとり得る全ての戦略の組み合わせに対して、ある戦略よりも真に劣っている戦略のこと) を取り除くことで、ゲームを徐々に小さくしていく手続きのことである。このようにして得られた戦略組は支配戦略均衡となることが知られている。支配戦略均衡である戦略組はナッシュ均衡点であるので、ナッシュ均衡を求める手続きとされることもある。

[3] 公理 K: $K(\varphi \to \psi) \to K\varphi \to K\psi$ や規則 RN: $\vdash \varphi \Rightarrow \vdash K\varphi$ などで特徴づけられる推論能力に関する性質。「知っている情報と論理的な推論から得られる全ての情報も知っている」などの理想化された推論能力のことを指す。

[4] そのプレイヤーのとり得る戦略について、それぞれ最も利得が低くなるようなケースを考えたとき、その中では最も利得が高くなる戦略のこと。

文献

[1] Simon, H. A. (1957). *Models of man; social and rational*. Wiley.

[2] Bernheim, D. (1984). Rationalizable strategic behavior. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 52(4):1002-1028.

[3] Pearce, D. (1984). Rationalizable strategic behavior and the problem of perfection. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 52(4):1029-1050.

[4] Bonanno, G. (2008). A syntactic approach to rationality in games with ordinal payoffs. In *Logic and the Foundations of Game and Decision Theory (LOFT 7)*, pages 59-86.

[5] Kaneko, M. and Suzuki, N.-Y. (2002). Bounded interpersonal inferences and decision making. *Economic Theory*, 19(1):63-103.

[6] Copic, J. and Galeotti, A. (2006) Awareness as an equilibrium notion: Normal-form games. Working Paper.

[7] Perea, A. (2022). Common belief in rationality in games with unawareness *Mathematical Social Sciences*, 119:11-30.

[8] Feinberg, Y. (2005). Games with incomplete awareness. Technical report, Technical Report Resarch Paper Series# 1894, Stanford Graduate School of Business.

[9] Schipper, B. C. (2015). Awareness. In van Ditmarsch, H., van Der Hoek, W., Halpern, J. Y. and Kooi, B.(Eds.), *Handbook of epistemic logic*, pages 77-146. College Publications.

[10] Halpern, J. Y. (2001). Alternative semantics for unawareness. *Games and Economic Behavior*, 37(2):321-339.

[11] Kubono, Y., Racharak, T. and Tojo, S. (2023). Logic of Awareness in Agent's Reasoning. In *Proceedings of the 15th International Conference on Agents and Artificial Intelligence*. 1:207-216.

（静岡大学）