超集合論—circularity の論理の現在—

(ワークショップ資料)

向井国昭
慶應義塾大学湘南藤沢

2002/11/10

1 はじめに

1.1 悪循環原理

ラッセルはホワイトヘッドとの共著プリンキピアマテマティカ序論 [3], の中で悪循環について次のように述べている.

> 不当な全体 (illegitimate totality) を排除するための原理は，次のように述べられる．「或る集まりのすべて [の成員] を含むものは，何であれ，その集まりの一員であってはならない」．あるいは逆に,「或る集まりが，全体を持つと仮定するとその全体によってしか定義できないような要素を含むことになってしまう場合，その集まりは全体を持たない」．これを「悪循環原理 (Vicious-circle principle)」と呼ぼう．その原理によって，不当な全体の仮定に含まれる悪循環を回避することができるからである．　(第二章 論理的タイプの理論, ページ 130 からの引用．)

この悪循環原理によれば, 全体はその要素となることはできない．たとえば, $x = \{x\}$ なる集合の存在は許されない．しかし, 循環を積極的に認める集合論も可能であることは知られていた．近年，無限に持続するプロセスや自己参照的状況の直接的モデルとして，循環的な集合の意義と有用性が認められ，データベースの更新モデルなど多くの応用が見い出されている.

循環集合を認めない集合論 ZFC が標準になった理由の一つは，集合のメンバシップ関係に基づく帰納的 (inductive) 証明が使えることがその主な理由のひとつであろう．つまり超限帰納法という武器が集合の構造の研究に使えることが大きい．$x = \{x\}$ なる集合があると，もはや帰納法は無条件では使えない．言い替えると，ZFC 集合論の世界は，確実なものから一段一段と確実に構成していく，いわば文字どおり足が地についた (well-founded) な世界であり，循環構造とは無縁である.

一方，帰納法の双対である余帰納的 (co-inductive) 構成は，トップダウン的な確認の論理であり，対象が地に足がついているかどうかには関心がない．すなわち循環構造をも受け入れる論理である．しかしながら，その循環性の論理による統制は，帰納的構成の場合とおなじくらいに堅固である．このことは帰納法と余帰納法の間に「双対性」が成り立つことがその根拠である．ブール代数である定理が成り立てば，その双対の定理も成り立つという良く知られた双対性定理というメタ定理の類似である．余帰納法は,「悪循環」ではない,「正しい循環」のために論理といえよう.

ラッセルは，悪循環原理は提案したが,「正しい循環の原理」についてはなにも語っていないないようである．ラッセルには無視されたかに見える正しい循環の論理はもっと見直されてもよいのではないかという思いから，Aczel [1] の超集合論の基本的な部分をこの機会に復習したい．

1.2 タイプ理論

上記の引用から推測できるように，ラッセルの悪循環原理のそもそもの目的は,「タイプ全体のタイプ」や「カテゴリ全体のなすカテゴリ」の概念の基礎を与えることにあったと思われる．そのために，タイプ理論を創始したのであろう．ラッセルに始まるタイプ理論は現在この「ものごとの全体」をどのように扱っているのだろうか？ また，ラッセルのタイプ理論はどのように評価されているのであろうか？

現代のタイプ理論を牽引した一人とみなされるマルチンレーフ [4] を下に引用したが，それによればラッセルのタイプ理論は，還元公理の導入をもって失敗とされている．そしてこの失敗のことは，ロジックの歴史のさまざまな啓蒙的な解説の中で繰り返し書かれていまや常識となっている．ラッセルのタイプ理論に立ち入る必要性も感じることなく，簡潔に整理された ZFC 集合論に安心して頼りきり浸りきってしまうのが，良かれ悪しかれ，大勢となってしまっている．

しかし,「タイプ全体のタイプ」あるいは「カテゴリの全体のカテゴリ」などのラッセルが究極の解決を目指したパラドックスは現時点でもまだ未解決である．このような情勢にあって，次のマルチンレーフの引用に見られるラッセルのタイプ理論の評価に見直しはありえないのであろうか？ ラッセルのタイプ理論は一般に流布しているとおりの歴史的遺物に過ぎないのか，あるいは見直すべきアイデアを今だに豊富に秘めているのであろうか？ 間接的にしかラッセルのタイプ理論を知らない（筆者のような）者にとって気になる点である．

> Mathematical logic and the relation between logic and mathematics have been interpreted in at least three different ways:
>
> (1) mathematical logic as symbolic logic, or logic using mathematical symbolism;
>
> (2) mathematical logc as foundations (or philosophy) of mathematics;
>
> (3) mathematical logic as logic studies by mathematical methods, as branch of mathematics.
>
> We shall here mainly be interested in mathematical logic in the second sense. What we shall do is also mathematical logic in the first sense, but certainly not in the third.
>
> The principal problem that remained after Principia Mathematica was completed was, according to its authors, that of justifying the axiom of reducibility (or, as we would now say, the impredicative comprehension axiom). The ramified theory of types was predicative, but it was not sufficient for deriving even elementary parts of analysis. So the axiom of reducibility was added on the pragmatic ground that it was needed, although no satisfactory justification (explanation) of it could be provided. The whole point of the ramification was then lost, so that it might just as well be abolished. What then remained was the simple theory of types. Its official justification (Wittgenstein, Ramsey) rests on the interpretation of propositions as truth values and propositional functions (of one or several variables) as truth

functions. The laws of the classical propositional logic are then clearly valid, and so are the quantifier laws, as long as quantification is restricted to finite domains. However, it does not seem possible to make sense of quantification over infinite domains, like the domain of natural numbers, on this interpretation of the notions of proposition and propositional function. For this reason, among others, what we develop here is an intuitionistic theory of types, which is also predicative (or ramified). It is free from the deficiency of Russell's ramified theory of types, as regards the possibility of developing elementary parts of mathematics, like the theory of real numbers, because of the presense of the operation which allows us to form the cartesian product of any given family of sets, in particular, the set of all functions from one set to another.

In two areas, at least, our language seems to have advantages over traditional foundational languages. First, Zermelo-Fraenkel set theory cannot adequately deal with the foundational problems of category theory, where the category of all sets, the category of all groups, the category of functors from on such category to another etc. are considered. These problems are coped with by means of the distinction between sets and categories (in the logical or philosophical sense, not in the sense of theory) which is made in intuitionistic type theory. Second. present logical symbolisms are inadequate as programming languages, which explains why computer scientists have developed their own languages (FORTRAN, ALGOL, LISP, PASCAL, ...) and systems of proof rules (Hoare[1], Dijkstra[2], ...). We have shown elsewhere[3] how the additional richness of type theory, as compared with first order predicate logic, makes it usable as a programming language.

1 C. A. Hoare, An axiomatic basis of computer programming, Communications of the ACM, Vol. 12, 1969, pp. 576-580 and 583.

2 E. W. Dijkstra, A discipline of Programming, Prentice Hall, Eaglewood Cliffs, N.J., 1976.

3 P. Martin-Löf, Constructive mathematics and computer programming, Logic, Methodology and Philosophy of Science VI, Edited by L. J. Cohen, J. Los. H. Pfeiffer and K.-P. Podewski, North-Holland, Amsterdam, 1982, pp. 153-175.

2 超集合論 $\mathrm{ZFC}^-/\mathrm{AFA}$

悪循環ならぬ，正しい循環の論理として，超集合論 [1](hyperset theory, non-well-founded theory) の組み立てを紹介する．標準の公理的集合論 ZFC は既知とする．ZFC は次の公理 FA を持っている．

公理 2.1 (FA (Axiom of Foundation)) 空でない集合は，それと交わらない集合を要素として含む．すなわち

$$\forall x\ (x \neq \emptyset \to (\exists y\ (x \cap y = \emptyset) \wedge (y \in x))).$$

この公理から自分自身を要素とする集合, たとえば $x \in x$ なる集合が排除される．次に，AFA (反基礎の公理,Anti-foundation Axiom) を正確に述べよう．‘ノード’ からなる集合 N と $N \times N$

の部分集合 E の順序対 $G=(N,E)$ を**グラフ**という．$(x,y)\in E$ のとき x を y の**親**, y を x の**子**と呼ぶ．G の各ノードに集合を割り当てる関数 d は，次の制約を満たすとき G の**デコレーション**とよばれる：G の各ノード x に割り当てる集合 $d(x)$ は x の子に割り当てる集合の全体である．すなわち，$d(x)=\{d(y)\mid y \text{ は } x \text{ の子}\}$.

公理 2.2 (AFA(Anti–Foundation Axiom)) 任意のグラフ G に対して，G のデコレーションが存在して唯一である.

超集合論は, ZFC の FA(基礎の公理) を AFA (反基礎の公理,Anti-Foundation Axiom) に置き換えて得られる集合論である．超集合論を ZFC$^-$/AFA と書く：

$$\mathrm{ZFC}^-/\mathrm{AFA} = \mathrm{ZFC} - \mathrm{FA} + \mathrm{AFA}.$$

以下本稿の最後まで，V は ZFC$^-$/AFA の集合全体のクラスを指すとする．同じく，すべてのクラスの集まりを $\mathcal{C}$ であらわす.

公理 AFA は, 後述の解補題と同値である．その定式化のために, グラフの概念をクラスに拡張する．'ノード' からなるクラス N と $N\times N$ の部分クラス E の順序対 $G=(N,E)$ を**システム**という．$(x,y)\in E$ のとき x を y の**親**, y を x の**子**と呼ぶ．x **の子の全体は集合を成す**と仮定する．G のデコレーションもグラフのそれと同様に定義される．グラフと異なり，システムのノードの全体は真のクラス (proper class) でも構わない．たとえば, $(V,\in)$ はシステムであるがグラフではない.

X を**パラメータ**のクラスとする ($X\subseteq V$)．X は真のクラスであってもよい．各パラメータ $x\in X$ に対して，集合 $a_x\in V$ を割り当てる関数のことを，**等式系**とよび，

$$x = a_x \quad (x\in X)$$

と書く．ZFC$^-$/AFA では $x=\{x\}$, $y=\{y\}$ なる等式系を満たす x,y の値が一致することも，演繹できる.

集合の世界での代入操作を保証する次の定理が，AFA から導かれる.

定理 2.1 (代入補題 (Substitution Lemma)) X をパラメータのクラス，A を 'アトム' のクラスとし，互いに素とする．$\theta=(b_x)_{x\in X}$ を集合族とする: $b_x=\theta(x)$. そのとき，関数 $\hat\theta$ がユニークに存在して，任意の集合 $a\in V$ に対して次の等式を満たす：

$$\hat\theta(a) = \{\theta(x)\mid y\in a\cap X\}\cup\{y\mid y\in a\cap A\}\cup\left\{\hat\theta(y)\mid y\in a, y\notin X, y\notin A\right\}.$$

この $\hat\theta$ を割り当て θ から決まる**代入**とよぶ．これは，一階述語論理において，変数に対する割り当て θ を一般の (変数でない) 項に対する代入操作 $\hat\theta$ に対して自然に拡張できるという良く知られた事実の類似である.

注意 2.1 本稿では試みとして，V の要素はすべて純粋の集合であると仮定している．いわゆる urelement は用いない．当然パラメータもアトムも純粋の集合でコーディングしているという立場である．したがって，割り当て θ と代入 $\hat\theta$ が同じパラメータに対して異なる結果を返す場合もあり得る．たとえば，パラメータを $\{\emptyset\}$ と $\emptyset$ の二つのみとして，割り当て θ を $\{\emptyset\}\mapsto\emptyset$, $\emptyset\mapsto\emptyset$ とする．すると，θ の定義そのものより，$\theta(\{\emptyset\})=\emptyset$ であるが，一方，代入 $\hat\theta$ の定義により，$\hat\theta(\{\emptyset\})=\{\theta(\emptyset)\}=\{\emptyset\}$ であるから，$\theta(\{\emptyset\})\neq\hat\theta(\{\emptyset\})$. 本稿の方法では，$V$ の要素は集合である，それと同時にパラメータあるいはアトムである場合もある．一見混乱しそうであるが，代入操作の対象は常に集合と見なされるので混乱はなく，Aczel [1] に比べて，むしろ理論の組み立てがすっきりするように思われる.

代入補題で保証された代入操作を使って，次の定理が証明される.

定理 2.2 (解補題 (Solution Lemma)) 等式系 $x = a_x \quad (x \in X)$ は常に解をユニークに持つ．すなわち，集合族 $\sigma = (c_x)_{x \in X}$ がユニークに存在して

$$c_x = \hat{\sigma}(a_x) \quad (x \in X).$$

例 2.1 解補題によれば, 次の集合方程式が解をユニークに持つ. $x = \{a, x\}$, $y = \{b, y\}$. ここで a, b はアトムとする.

一般に, 任意のクラス X について, F の値が X の部分集合の値の和として表せる—$F(X) = \bigcup\{F(x) \mid x \in V, x \subseteq X\}$— とき, F を *set continuous* という. Set continuous なクラス作用素について次の定理が成り立つ.

定理 2.3 Set continuous なクラス作用素は, 最大不動点と最小不動点を持つ.

次の定理は**帰納法 (induction)** を保証している.

定理 2.4 F が set continuous なクラス作用素ならば次は同値である.

- X は F の最小不動点である.
- X は $F(X) \subseteq X$ を満たす最小のクラスである.

次の定理は，**余帰納法 (co-induction)** を保証している.

定理 2.5 F が set continuous なクラス作用素ならば次は同値である.

- X は F の最大不動点である.
- X は $X \subseteq F(X)$ を満たす最大のクラスである.

例 2.2 $F(X) = A \times X$ なるクラス作用素 F は set continuous であり，F の最大不動点は A の要素からなる ‘ストリーム’ の全体 A^* である．A を観察可能なアクションの集合として，A^* は，アクションの無限列を意味しており，プロセス代数理論において基本的である.

2.1 特殊終余代数定理 (Special Final Coalgebra Theorem)

上述のように ‘ストリーム’ の全体はあるクラス作用素の不動点として定義された．一般に，この例が示すようにデータ型を作用素の不動点として定義する方法は有力である．そのような方法論の基礎として，ZFC$^-$/AFA を用いる特殊終余代数定理 (special final coalgebra theorem) がある．これについて説明しよう.

Set continuous でかつ包含射像を保存するクラス関手 T を**標準関手 (standard functor)** と呼ぶ:

$$T(\iota_{A,B}) = \iota_{T(A),T(B)}$$

ここで, $\iota_{X,Y}$ はクラス X から Y への包含写像を表す. $(X \subseteq Y)$

T をクラス関手, $f\colon A \to T(A)$ として (A, f) を T の**余代数** (final coalgebra) という. f をこの余代数の**構造射** (structural morphism) と呼ぶ. (A, f), (B, g) を T の余代数とする. 関数

$h\colon A \to B$ が $T(h) \circ f = g \circ h$ を満たすならば, h を余代数 A から B への**仲介射** (mediating morphism) と呼ぶ.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ T(A) \arrow[r, "T(h)"'] & T(B) \end{tikzcd}$$

関手 T の余代数とその間の仲介射の全体が圏をなすことは容易に確かめられる．この圏の始対象 (initial object) すなわち T の始代数 (initial algebra) と, 終対象 (terminal object) すなわち T の終余代数が重要である.

例 2.3 クラス X に対してその部分集合の全体を $\mathrm{pow}(X)$ とおく: $\mathrm{pow}(X) = \{x \mid x \in V, x \subseteq X\}$. $f\colon X \to Y$ のとき，$\mathrm{pow}(f)\colon \mathrm{pow}(X) \to \mathrm{pow}(Y)$ を $\mathrm{pow}(f)(x) = \{f(u) \mid u \in x\} \quad (x \in \mathrm{pow}(X))$ で定義すると，pow はクラス関手である．V は pow の最大不動点であり，かつ，解補題から pow の終余代数であることが分かる.

例 2.4 x, y をパラメータ, f を $\mathrm{dom}(f) = \{x, y\}$ なる関数で, $f(x) = \{x, y\}$, $f(y) = \{\emptyset, x\}$ とする．このとき $(\{x, y\}, f)$ は pow-余代数である．この余代数は等式系 $x = \{x, y\}, y = \{\emptyset, x\}$ を表している.

ZFC$^-$/AFA の世界 V では，V 自身が pow の最大不動点でかつ pow-終余代数であった．一般に, 最大不動点が終余代数と一致するようなクラス関手の条件は何か? アトムのクラスを空クラスとして，パラメータのクラスを $\mathrm{dom}(f)$，代入補題により, f に対して代入操作 $\hat{f}$ がユニークに決まった．そして，$\mathrm{pow}(f)(u) = \hat{f}(u)$ と，$\mathrm{pow}(f)$ の作用が代入操作として表された．pow のこの性質を一般化したのが次の定義である.

定義 2.1 (射に関して一様 (uniform on maps)) $\mathcal{C}$ の自己関手 T が**射に関して一様** (uniform on maps) であるとは次の条件が成り立つことである: 任意のクラス A とその要素 $u \in A$ に対してあるふたつの集合 c_u と X_u，および， 全単射 $\psi\colon X_u \to u$ が存在して次の条件を満す.

1. $\hat{\psi}(c_u) = u$.
2. 任意の $f\colon A \to V$ について，$T(f)(u) = \widehat{f\psi}(c_u)$.

この定義のもと，Aczel は **AFA を仮定して**次の定理を証明した.

定理 2.6 (特殊終余代数定理 (The Special Final Coalgebra Theorem)) 標準関手 T が射に関して一様ならば T の最大不動点 $J(T)$ は T の終余代数である.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & J(T) \arrow[d, phantom, "\|"] \\ T(X) \arrow[r, "T(h)"'] & T(J(T)) \end{tikzcd}$$

例 2.5 クラス関手 pow は射に関して一様であり，明らかに V が pow の最大不動点である．よって pow の終余代数は V である．したがって，上例の余代数 $(\{x, y\}, f)$ から V へ関数 h がユニークに存在して

$$h(x) = \mathrm{pow}(h)(f(x)) = \{h(x), h(y)\}$$
$$h(y) = \mathrm{pow}(h)(f(y)) = \{\emptyset, h(x)\}.$$

これからも明らかなように, 関手が pow のとき特殊終余代数定理は, 等式系の右辺の集合がすべて‘フラット’な場合の解補題と同値である．

この定理の応用範囲は広い．とくにプロセス代数や状況理論のメタ理論としての応用が知られている．なお，余代数を等式系, 終余代数を可能な解の値の領域, 余代数から終余代数へのユニークな仲介射を解と見なすことにより，解補題自身を，一階述語論理の項の単一化理論やさらにはその無限木領域上の単一化理論などの拡張とみることができる．この意味で，$\mathrm{ZFC}^-/\mathrm{AFA}$ は，項や木という伝統的なシンタックス的構造の集合論的拡張とみることができるだろう．

注意 2.2 恒等関手 $id_{\mathcal{C}}$ は標準関手であり，V が $id_{\mathcal{C}}$ の最大不動点である．さて，任意のシングルトン $\{x\}$ は, $id_{\mathcal{C}}$ の余代数として一意に構造射を持つ，しかしこの余代数から V への仲介射は無数に存在するから，V は $id_{\mathcal{C}}$ の終余代数ではない. 実際，容易に分かるように $id_{\mathcal{C}}$ は射に関して一様ではない．(代入操作の項で述べた注意を参照．)

2.2 関手と構造の例

$id_{\mathcal{C}}$，定数関手，$A \times \_$ はすべて set-based である．Set-based な関手は合成に関して閉じている．Set-bbsed な関手の族の和, 直和, 積もいずれも set-based である．これらはいずれも困難なく確かめられる．

例 2.6 共変べきクラス関手 pow が set-based であることは容易にわかる．ここで, $\mathrm{pow}(X) = \{u \in V \mid u \subseteq X\}$, $\mathrm{pow}(f)\colon \mathrm{pow}(X) \to \mathrm{pow}(Y)$, $\mathrm{pow}(f)(u) = \{f(x) \mid x \in u\}$ $(u \subseteq X)$, であった．pow は応用上，極めて重要な set-based 関手である．

例 2.7 (有限オートマトン) Σ を‘入力記号集合’として, $\emptyset$ を ε と書き‘空列’とよぶ．$\Delta(S) = \mathrm{pow}(\{\varepsilon\} \cup \Sigma \times S)$, $f\colon S \to S'$ とする．$x \in S$, $u \in T(x)$ に対して $\Delta(f)(u) = \{\emptyset \mid \emptyset \in u\} \cup \{(a, f(z)) \mid (a, z) \in u\}$ と定義する．このとき，Δ は関手をなし，**Σ-オートマトン関手**とよぶ．Δ は明らかに set-based であり，より強く，standard でかつ射に関して一様でもある．有限オートマトン $(S, \Sigma, \delta, s, F)$ $(F \subseteq S,\ s \in S,\ \delta \subseteq S \times \Sigma \times S)$ に対して, 次の等式で定義される Δ-余代数 δ' が対応する：

$$\delta'(x) = \{\varepsilon \mid x \in F\} \cup \{(a, y) \mid \delta(x, a, y)\} \quad (x \in S).$$

逆に Δ-余代数 $\delta'\colon S \to \Delta(S)$ に対して，有限オートマトン $(S, \Sigma, \delta, s, F)$ は次で定義される．$s \in S$, $F = \{s \mid \varepsilon \in \delta'(s)\}$, $\delta(x, a, y) \iff (a, y) \in \delta'(x)$. これから (初期状態の指定は除いて) 有限オートマトンの概念と Δ-余代数の概念が正確に対応していることがわかる．決定性オートマトンの場合も同様にある適当な関手に対する余代数として再定式化できる．さて，終余代数定理は，有限オートマトンが言語を定めるという事実を含んでいる．その言語は一般に Σ の記号の‘ストリーム’であるが，有限長の記号列に制限すれば，それは通常の正規言語の理論を余代数の操作から再構成できる．

例 2.8 (有限木と無限木) A を**シグニチャ**とする．

$$T(X) = \{a(x_1,\ldots,x_n) \mid a \in A \text{ の次数は } n \geq 0,\, x_i \in X \quad (1 \leq i \leq n)\},$$

かつ，$T(f)(a(x_1,\ldots,x_n)) = a(f(x_1),\ldots,f(x_n))$ と定義する．すると T-代数とその間の準同型の成す圏の始代数は，A から生成される自由 A-代数を表している．一方，T-余代数とその間の準同型の成す圏の終余代数は，A から生成される無限木の全体を表している．

2.3 AFA を仮定しない終余代数定理

自己参照的な集合のモデルとしては，特殊終余代数定理の意義は大きい．しかし，自己参照的な集合の存在という '哲学的論争' にはコミットせずに，機能的にはその存在を実質的に認めていると考えられる終余代数定理 (final coalgebra theorem) の意義も大きい．終余代数定理は特殊終余代数定理の一般化であるが，FA も AFA も仮定しないで証明される．そして，終余代数定理から non-well-founded な集合の世界が終 pow-余代数としていとも簡単に作れてしまう．以下この終余代数定理を説明する．

次の条件を満たすクラス関手 T を **set-based** と呼ぶ: 各クラス A と, 各 $a \in T(A)$ に対して, ある集合 $B \subseteq A$ と $b \in B$ が存在して, $a = T(\iota_{A,B})(b)$. Aczel と Mendler は次を証明した [2].

定理 2.7 (終余代数定理 (Final Coalgebra Theorem) [2]) クラス関手 T が set-based ならば T の終余代数が (A, f) 存在する: T の任意の余代数 (B, g) に対して次の図式が可換となるような, (B, g) から (A, f) へ仲介射 h がユニークに存在する．

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "f"] \\ T(B) \arrow[r, "T(h)"'] & T(A) \end{tikzcd}$$

この定理は, もはや **AFA を仮定していない**. そのかわり一般には, A は T の最大不動点ではない. しかし, 終余代数の構造射が必然的に同型射になることは, 圏論で良く知られた命題である．pow の終余代数が ZFC$^-$/AFA のモデルとなることを示すことも難しくない. つまり終余代数定理は ZFC$^-$/AFA のモデルの構成を特殊な場合として含んでいるわけである.

例 2.9 $id_{\mathcal{C}}$ は set-based である. したがって終余代数を持つ. 実際, どんなシングルトンも $id_{\mathcal{C}}$ の終余代数である.

3 おわりに

余代数の研究はこの 5 年間に精力的研究されている．その論文集は Web でも容易にアクセスできる．また優れたチュートリアルも同様である．一例にすぎないが，[5] をあげる．

本稿では，Aczel に従い，クラス全体のなすカテゴリという，ラッセルの数学基礎論的な態度にはふさわしくない一見 'あやしげな '巨大カテゴリを使っている．しかし，アイデアのポイントを端的に提示する点でもクラスは優れているので，クラス使用を踏襲した．実際は，クラスの使用もごく安全な範囲であり，きわどいことはしていないので，基礎論的にも問題にならな

いことは ZFC の使用と同じことである．なお，クラスを使わないより安全な終余代数定理の証明もいくつか発表されている．

最後に，特殊終余代数定理を純粋集合の宇宙 V の中で手短に，しかも厳密に述べ直したのは本稿の小さな貢献かもしれない．Aczel のオリジナルの定式化と証明は，‘パラメータ’ の使用のために V を拡張するなど無視のできないやや繁雑な手順が必要であった．しかし，本稿の定式化が Aczel のオリジナルなそれと等価であることは，自明に見えることもあり，省略した．しかし，厳密には証明が必要である．

文献

[1] P. Aczel. *Non-well-founded Sets.* CSLI lecture notes Number 14. CSLI Publications, Stanford University, 1988.

[2] P. Aczel and N. Mendler. A final coalgebra theorem. In P.H. Pitts, D.E. Rydeheard, P. Dybjer, A.M. Pitts, and A. Poigné, editors, *Category Theory and Computer Science*, number 389 in LNCS. Springer-Verlag, 1989.

[3] B. ラッセル, A.N. ホワイトヘッド著/岡本賢吾, 戸田山一久, 加地大介訳. **プリンキピアマテマティカ序論**. 哲学書房, 1988.

[4] P. Martin-Löf. *Intuitionistic Type Theory.* Bibliopolis, 1984.

[5] J. J. M. M. Rutten. Automata and coinduction (an exercise in coalgebra). In *144*, page 22. Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI), ISSN 1386-369X, 31 1998.