ラッセルのパラドクス：もう一つの起源

三平　正明

ラッセルによるパラドクスの発見、そしてそれがフレーゲの『算術の基本法則』の体系を揺るがしたことは、広く知られている。しかし、パラドクスの発見には、フレーゲ－ラッセルとは別のルートも存在する。実際、フレーゲがパラドクスを論じた『基本法則』第2巻を送ったとき、ヒルベルトは、「あなたの言及された事例は当地の我々にはよく知られております。私は、他の一層説得的な諸矛盾をすでに四、五年前に見出していました」と述べ、「私が諸事例を伝達したことに基いて、三、四年前にツェルメロ博士がこの事例を発見した」と指摘している（1903年11月7日付のフレーゲ宛葉書)。以下では、100周年を機にこの別のルートを取り上げ、パラドクスが見出された伝統を多少考え直してみたい。

I. ヒルベルトのパラドクス

ヒルベルトによる「諸矛盾」の発見は、手紙の日付から逆算して1898年か99年のことだと考えられている。だが、ヒルベルトはどのような矛盾を発見したのだろうか。少なくともその一端は、1905年夏学期のヒルベルトの講義『数学的思惟の諸原理』に関する最近の研究から、明らかになっている。ここでは、そうした成果に基いて、「ヒルベルトのパラドクス」について報告する。

1897年にヒルベルトは、カントールから一つのパラドクス、詳しくは、すべてのアレフの総体が完成した（fertig）集合とは見なしえないことを告げられる。

> つまり、すべてのアレフの総体は、一つの確定し、きちんと定義され、完成した集合としては把握しえないようなものである。仮にこうした把握ができるとしたら、この総体の後には、その大きさに従って、一つの確定したアレフが続くだろう。それ故、このアレフは当該の総体に（要素として）属しもするし、また属さないことにもなろう。だが、これは矛盾である。

この矛盾に関して、両者の間でやりとりが交わされた。この時点では、興味深いことに、ヒルベルトはこうした矛盾に対して疑念を表明している。「何らかの物が与えられるときにはいつでも、当の物がアレフか否かが決定されなければならない」。したがって、そうしたアレフのみから成る総体は、「一つの確定し、きちんと定義された集合として把握することができる」。それに対

してカントールは、ここで重要なのは「きちんと定義されている」かではなく、「完成した」ものと見なせるかどうかだと答えている。

しかしその後、ヒルベルトは、アレフの総体の非存在がカントールによって証明された、と明確に主張するようになる。もちろん、こうした変化の背景にあるのは、カントールの刺激を受けてヒルベルトが自ら「諸矛盾」を構成し、集合論や伝統的論理学の概念構成の不十分さを確信したということだろう。例えば、目下の矛盾では、「アレフである」という概念がきちんと定義されるだけでは不十分だ、と見なされることになろう。

ヒルベルトの講義は、このような確信をもたらした矛盾の事例として、三つのものを挙げる。一つは、嘘つきのパラドクスである。そして、残りの「ずっと説得的な矛盾」の一つは、ヒルベルトが自ら構成した（集合論上の）矛盾であり、「数学的な性質」の事例である。もう一つは、「ツェルメロがそれから導き出したもの」であり、「純粋に論理的」な事例である。したがって、フレーゲ宛の葉書で言及された「諸矛盾」の少なくとも一つが、二番目の事例であるのは確実だろう。この事例は、現在「ヒルベルトのパラドクス」と呼ばれている。そして、純粋に論理的な事例は、当時のゲッティンゲンでは「ツェルメロのパラドクス」と呼ばれていた。

ヒルベルトは、自分の構成したパラドクスに関して次のように述べている。

> 純粋に数学的な性質のものである第一の矛盾は、私には特に重要であるように思われる。私はそれを発見したとき、初めは、この矛盾が集合論の行く手に克服しえない困難をもたらし、集合論はこうした困難のために挫折してしまうのだと考えた。しかしながら、現在では私は、今までこの学問で常にそうであったように、基礎を修正した後には、一切の本質的なものが維持されるだろうと信じている。私はこの矛盾を公表しなかった。しかし、それは集合論者には、特に G. カントールには知られているものである。

では、このパラドクスはどのように構成されるのだろうか。次に、その概要を述べてみる。ヒルベルトは慎重に自然数の集合から出発する。そして、新しい集合を構成する演算として、二つのものを承認する。一つは「加算原理（Additionsprincip）」である。

> 2つのこのような［可算無限］集合 $(1, 2, 3\ldots)$ と $(a_1, a_2, a_3\ldots)$ を一つの新しい概念単位 $(1, 2, 3\ldots a_1, a_2, a_3\ldots)$ に、つまり、この二つの集合の各要素を含む新しい集合に統合するのは、許されるように思われる。同様に我々はまた、さらに多くの集合を、それどころか無限に多くの集合を一つの合併集合に統合することもできる。我々はこれを加算原理と呼ぶ。$\cdots$ このような統合は、論理学では常に何の疑念もなく、ずっと複雑な場合でも適用される

> ような過程である。したがって、我々の場合でも直ちにそれを使用してよいように思われる。

もう一つの演算は「配置原理（Belegungsprincip）」である。ヒルベルトは、与えられた集合 M から M 自身への関数を「自己配置」と呼んでいる。したがって、自己配置の全体 M^M を作る演算が配置原理である。

> … きちんと定義された集合から、自己配置によっていつでもまた、きちんと定義された集合が生じる。（配置原理）。例えば、この原理によって、すべての実数の連続体からすべての実関数の集合が生じる。この二つの原理はこれまでの一切の数学と論理学に従えば問題のないものであり、それらのみを用いて我々は進むことにしよう。

次に、自然数の集合に二つの原理を「任意の回数だけ適用することにより」生じる、すべての集合を考える。そして、これらの集合を加算原理により統合すると、一つのきちんと定義された和集合Uが生じる。さて、ここで U に再び配置原理を適用して、$F = U^U$ とおく。すると、F も自然数の集合に二つの原理を適用してできた集合だから、F は U に含まれている。すなわち、（∗）$F \subseteq U$。

ヒルベルトは（∗）から矛盾を導く。（∗）により、U から F への全射が存在する（つまり、F の要素 f_i は U の要素 u_i によってもれなく対応づけられる）。したがって、「カントールの対角線論法の原理」が使えて、U の自己配置であって、しかもどの $f_i \in F$ からも異なるような関数 g を作ることができるだろう。もしこのような g を作ることができれば、もちろん矛盾が生じることになる。そこで、U の自己配置 f_i が u_i に $f_i(u_i) = u^{(i)}_{f_i}$ を対応させるならば、u_i の g による像はそれとは異なるように定めていく。つまり、$g(u_i) = u^i_g \neq u^{(i)}_{f_i}$。すると、「このような g は、F のどの配置 f_k とも少なくとも一つの対応で異なる」。

このように、ヒルベルトのパラドクスの導出は、基本的にはカントールの定理を応用したものだが、集合構成の原理を明示的に述べている点に特色が認められる。そして、カントールやブラリ・フォルティのパラドクスと比べると、超限数の理論といった、集合論に特有な部分を含まず、集合構成の原理は「伝統的論理学や数学の演算」に限定されている。そのためにヒルベルトは、このパラドクスを「純粋に数学的な事例」と見なし、通常の数学にとって深刻だという理由で「特に重要なもの」と考えたのだろう。

それでは、このパラドクスではどこに問題があるのだろうか。たしかに、様々な指摘が可能かもしれない。例えば、集合 U の構成が非可述的な点に着目して、非可述的定義を一般に禁止すべきだという主張もありうるだろう。また、一定の関数全体の存在を直ちに許してしまう配置原理を問題にしたり、あるいはそれどころか、自然数が確定した集合を成すという、最初の出発点

がすでにおかしいと考えられるかもしれない。だがいずれにせよ、こうした指摘はヒルベルトの脈落には馴染まないだろう。ヒルベルトによれば、出発点に選ばれた「整数やそこから生じる集合」は、「純粋に数学的なもの」であった。また、配置原理は、実関数全体といった関数空間を許す原理である。したがって、ここではやはり、ペックハウスとカーレが主張するように、「加算原理」を問題にするのが自然だろう。この原理は曖昧な形で定式化されている。言い換えれば、どの範囲の集合の和をとってよいのかということを全く規制しない。これは、現在の公理的集合論における和集合公理とは対照的である。そこでは、和が取られる各集合は、「すでに確立された」集合の要素となっていなければならないからである。ベルナイスもまた、無制限な和集合形成に問題の核心を見ていた。

> 出発集合（例えば自然数の集合）から始めて、べき集合形成や合併過程、分出によって形成できる諸集合へ［認められる集合を］制限するという着想も――私はそれをヒルベルトの話から知ったのだが――当時は考慮されていた。しかし、この着想は、当面はまさにパラドクスを先鋭化することになった。なぜなら、合併過程が十分明確に規格化されておらず、かえって、上記の諸過程により獲得可能な諸集合を一つの集合に統合することの方が、許容可能な合併過程と見なされていたからである。

II. ツェルメロのパラドクス

今度は、「ツェルメロのパラドクス」と呼ばれていた事例を取り上げよう。この事例は、フッサールの遺稿の中に、ツェルメロとの会話の覚書として残されていた。

> ツェルメロが（1902 年 4 月 16 日に）私の『シュレーダー批評』272 頁に関して伝える。
>
> > 証明遂行ではなく、事柄において、シュレーダーは正しい。つまり、自らの部分集合 $m, m', \ldots$ をすべて要素として含む集合 M というのは、不整合な集合である。すなわち、もしそれがそもそも集合として扱われるならば、矛盾へと通じる集合である。
>
> 証明
>
> > 自己自身を要素として含まない諸々の部分集合 m を考える。⋯ これらの集合は、その全体において一つの集合 $M_0 \ldots$ を成す。さて、私は M_0 について、1）それが自己自身を要素として含まないこと、2）それが自己自身を要素として含むことを証明する。

> １）について。M_0 は、M の部分集合としてそれ自身 M の要素であるが、しかし M_0 の要素ではない。なぜなら、そうだとすると、M_0 は、自己自身を要素として含む M の部分集合（つまり M_0 自身）を、要素として含むことになるが、これは M_0 の概念と矛盾するからである。
>
> ２）について。よって、M_0 自身は、自己自身を要素として含まない M の部分集合である。したがって、それは M_0 の要素でなければならないだろう。

ヒルベルトは、この事例が自分の事例から導き出されたものだと述べたが、今やその理由は明らかだろう。実際、当該の集合Mについては $P(M) \subseteq M$ が成り立ち、これをヒルベルトの場合の（＊）として「対角線論法の原理」を適用すればよいからである（部分集合の代わりに特性関数を考えれば、類似性はさらに明瞭となるだろう)。そして、こうしたツェルメロの導出は、ラッセルが最大基数のパラドクスから自身のものを導いたのと全く同じ仕方であったと考えられる。このことは、ツェルメロがショルツ宛書簡で、「当時、私もまた、最大基数の二律背反に対して、後にラッセルにちなんで名づけられた正確な形式を与えた」と述べている点からも明らかである。

こうして、ツェルメロはヒルベルトの事例をさらに単純化した。ヒルベルトが数学的概念も用いていたのに対して、ツェルメロは、(当時の意味で)「論理的な」概念しか用いていないからである。その後、周知のように、ツェルメロは集合論の公理化に乗り出す。この際にはもちろん、ツェルメロのパラドクスばかりでなく、ヒルベルトのパラドクスも排除するように、公理化が行われたと考えなければならないだろう。実際、前者の事例に対しては、包括原理を制限した分出公理が、そして後者の事例には、無制限な合併の形成を許さない和集合公理が提案されたのである。

III. シュレーダーの「０と１のパラドクス」

最後に、覚書で言及されたシュレーダーの議論に目を向けよう。この議論は、1890 年の『論理代数講義』の中に登場する。そこでは、シュレーダーは、「ブールによって論理学の中に導入された「議論可能なものの領域（Universum des Diskussionsfähigen)」、ジェヴォンズやR．グラスマンの総体（Totalität）ないし一切（All)」(243 頁）を取り上げ、それらにはみな問題があると指摘する。

> 実際、１というものを、先に記述した（ブールの）「議論可能なものの領域」のように包括的な、いわば全く開いたクラスと解するのは、許されない。(245 頁)

そしてこの点を、シュレーダーは次のように証明しようとする。

> つまり、すでに約定したように、０が、多様体（Mannigfaltigkeit）１から取り出せるいかなるクラスの中にも共に含まれるべきであり、そこで０＊ａが成り立つとすれば[1]、０はいかなる述語に対しても主語であるべきだろう。
>
> さて、我々はａを、当の多様体のクラスのうちで１と等しいものから成るクラスと解そう。〔一切の思考可能なものを多様体１の中に含めることが許されるのなら、これも当然認められるだろう。〕すると、このクラスは、本質的にはただ一つの対象、つまり、記号１自身、ないしはその意味を成す当の多様体全体を包括するが、しかしそれ以外にもまた「皆無（nichts）」、よって０も包括するであろう。したがって、１と０が、１と等しいと見なされねばならない対象のクラスを成すのだから、１＝１のみならず、また０＝１も承認されねばならないだろう。（245 頁）

すなわち、絶対的な普遍クラスの想定は、「０＝１」という矛盾、「０と１のパラドクス」へと通じる。しかし、残念ながら、シュレーダーの与えた「証明」は、多くの人が指摘するように疑わしいものだろう。実際、フッサールも『シュレーダー批評』の当該箇所（272 頁）で、その難点を指摘していた。

> この論証は一見当惑的だが、詭弁である。クラスＫを作って、このＫでは、その要素自体がクラス、詳しくは、＝１であるようなクラスだとしてみよう。すると、１＝１であるから、Ｋは当然、クラス１を要素として含む。しかし、このＫはまたクラス０も要素として含むのか？　断じてそうではない。クラスＫのすべての要素については、定義により、その要素＝１が成り立つが、しかし、Ｋの従属クラスについては成り立たない。したがって、０＝１ではないのである。

シュレーダーの論証にはやはり、（恐らくは個体と単元クラスの過度な同一視による）包含関係と成員関係の混同があると言わざるをえない。しかし、そこには、フッサールの目には留まらず、だがシュレーダーは感じ取った深刻な問題が存在する。「証明遂行ではなく、事柄において、シュレーダーは正しい」というツェルメロの警告は、その点を告げるものであった。

尚、シュレーダーはパラドクスを回避するために、独自な考えを提示した。それによれば、我々の扱うべき多様体１は無規定の普遍クラスではなく、最初はまず、何らかの個体から成る、予め固定された多様体でなければならない。シュレーダーはこの多様体に二つの条件を課す。一つは、それが「整合的（konsistent）」でなければならない（213 頁）という条件である。これは、

[1] 記号＊は、＝に ‘)’ を重ねた記号

各要素が「両立可能」であり、それらが一つの全体として考えられることを意味する。もう一つの条件は、多様体の「純粋性（Reinheit）」である。つまり、「「個体」として与えられる多様体の諸要素の中には、同じ多様体の要素を個体として含むクラスがあってはならない」（248 頁）。この条件を満たさないものは「混合多様体」と呼ばれ、排除される。

そして、整合的で純粋な多様体が与えられると、その部分クラスを個体と見なすことにより、新たに「第一次導多様体」が形成される。一般に、ｎ次の導多様体からは、ｎ＋１次の導多様体を形成することができよう。但しその際には、「第一次多様体内部の考察は、第二次多様体内部の考察と混同してはならない」。各段階に応じて、「すべての表現、演算記号、関係記号は、新しい、独自の意味を要求し」、異なった仕方で表記されなければならない。このような提案によって、「０と１のパラドクス」が排除できるのは明らかだろう。チャーチは、シュレーダーの提案を「単純タイプ理論の先取り」と評価した。

さて、このように流れを辿ると、ツェルメロ－ラッセルのパラドクスは、「事柄においては」、シュレーダーの考察にまで遡ることができる。しかし、これは意外な印象を与える。というのも、シュレーダーは、ブールなどから始まる論理代数の伝統に属し（『論理代数講義』　-　巻はこの伝統の「記念碑的著作」とされる）、そして代数派は、基本的にはパラドクスとは無縁と考えられてきたからである。一般に、この伝統で目指されるのは数学の基礎づけではなく、「論理の数学化」（論理の代数的取扱い）だとされる。そこでは、一定の計算体系が、クラス、命題、確率などの領域に応じて解釈される。とりわけクラスに関しては、絶対的な普遍クラスではなく、その都度必要な普遍クラスのみが考慮される。これに対して、フレーゲやラッセルの伝統が目指すのは、「数学の論理化」である。その際には、算術記号の利用は回避され、「数学のための記号言語」、より適切には「普遍言語」が構築される。この言語はありとあらゆる対象を扱い、解釈の（変更の）余地を残さない。

こうした二つの伝統の相違は、しばしば、「論理の数学化 対 数学の論理化」とか「計算 対 言語」と定式化されている。とすれば、パラドクスが問題となりうるのは、本来、「フレーゲやラッセルのような論理主義者のみ」であって、論理代数の側ではないはずだろう。論理主義の伝統からパラドクスが出るのは、ある意味で「自然」であるが、論理代数の伝統でパラドクスが考察されるのは、不自然なように思える。

しかし、シュレーダーの関心を偶然と見るわけにはいかない。実際、シュレーダーは、その適否はともかく、ブールの ‘ universe of discourse ’ を非常に強く「議論可能なものの領域」と捉えていた。またデデキントに対しても、シュレーダーは同様の疑念を表明している。「端的に思考－物と設定された「要素」の捉え方はいささか広すぎ、概念的制限を要するのではないか」（351）。このような関心を「偶然」と記述するのは、明らかに困難だろう。

「論理の数学化」と「数学の論理化」は、本当に対立しているのだろうか。実際には、それほど単純化はできないと思われる。例えば、フレーゲの『概念記法』の書評において、シュレーダーは、「算術的判断の論理的本性」を確立するという著者の試みを支持する（93 頁）。また『論理代数講義』でも、算術は論理学の一分野であり、分析的だ（　441 頁）と見なされる。特に以下の叙述は、シュレーダーの見解を鮮明に表現する。

> あるいはまだ一般に共有されていないかもしれぬ個人的見解として、私は、純粋数学が自分には単に一般論理学の一部門のように思えると述べておきたい。… 普遍表記法の（pasigraphisch）観点からすれば、算術は、一切の特殊なカテゴリー、一切の固有な原始概念なしで済ますことができる。というのも、（多数性（Vielheit）、基数、有限性、極限値、関数、写像、和、等々のような）算術のすべての概念を構成するのには、すでに一般論理学の概念で十分だからである。また同様に、算術は、一般論理学の「諸原理」で済ませることができ、その証明遂行にはいかなる「公理」も要さない。（149）

このような構想は、一般的な見方、すなわち、シュレーダーが数学の基礎づけとは別の伝統に属するということに反する。むしろ逆に、シュレーダーも、フレーゲやラッセルと同様に論理主義者だと言えるだろう。

＊　不完全な資料で申し訳ありませんが、できたところまで掲載します。完全なヴァージョンは当日配布したいと思います。