シンポジウム提題要旨– 構成的数学について –

石原　哉 （北陸先端科学技術大学院大学）

数学における構成的な考え方は，Dedekind や Cantor に代表される高度に抽象的な概念や証明方法に対する一つのリアクションとして，19 世紀の終わりに興ってきた．Kroneker は解析学と代数学の算術化（自然数と自然数論への帰着）を試み，フランス経験主義の Borel は，Kroneker に近い考えで，連続体について論じている．Poincaré や Weyle は可述性（predicativity）を論じた．構成的な考え方の特徴は，数学的な対象は構成（あるいは計算）されるものであり，数学的対象の存在証明はそれを構成（あるいは計算）する方法を与えなければならない，というものである．

L.E.J. Brouwer (1881-1966) は，従来の論理における原理（例えば、排中律）をも再考し，後に Heyting や Kolmogorov 等により形式化される直観主義論理に基づいて，数学の再構築を試みた．Brouwer の直観主義数学では，（通常の数学からすると特殊な）連続性に関する公理を認めているので，完備可分距離空間から距離空間への写像は連続である等，通常の数学と矛盾する結果も証明できる．

しかしながら直観主義論理それ自身は通常の論理より弱いため，通常の論理と矛盾せず，現在“ Proofs as Programs ”という表現に端的に表されるように，証明とプログラムの間に Curry-Howard の対応と呼ばれる対応が成り立つため，証明からプログラムを自動合成することが原理的に可能である．この対応関係は，通常の論理では成り立たない．

A.A. Markov (1903-1979) は，直観主義論理に基づき，さらに扱う数学的対象は計算可能であるという公理を認めた，Markov の構成的数学を構築した．この枠組みは，（従来の数学からすると）特殊な公理を認めているので，従来の数学と矛盾する結果も得られる．例えば，Tseĭtin は，直観主義数学と同様に，完備可分距離空間から距離空間への写像は連続であることを証明した（この結果は，計算可能数学における Kreisel，Lacombe と Shoenfield の結果に対応しており，KLST 定理と呼ばれている）．

E. Bishop (1928-1983) は，その著書 [4] において，直観主義論理を用いて解析学の基本的な部分を再構築し，現在では“ Bishop の構成的数学 ”と呼ばれる構成的数学を確立した．Bishop の構成的数学は，特殊な公理を仮定しないため通常の数学と矛盾した結果は得られない．さらに，それぞれに対応する公理を加え拡張することにより，通常の数学，Brouwer の直観主義数学，Markov の構成的数学の体系を得ることができ，もっとも一般的な構成的数学といえる．（数学における構成的な考え方の歴史は [11, 1.4 節] および [10]，Bishop の構成的数学は上記 [4] の他に，[3, 5] で知ることができる．）

Bishop の著書を契機に，Bishop の構成的数学のための，直観主義集合論を含むいくつかの形式体系が提案された．Martin-Löf の型理論 [7] もこの流れのなかで捉えることができる．Aczel は，Martin-Löf の型理論に非常に自然な解釈をもつ集合論 The constructive Zermelo-Fraenkel set theory (CZF) を提案した [2]．CZF は可述的であるため，べき集合の公理をもたず，替わりにべき集合の公理より弱い，多価関数の（ある）集合の存在を主張する Fullness という公理をもっている．

構成的数学は，解析学（特に関数解析学）[4] や代数学 [8] を中心に研究がなされてきたが，近年位相の研究が盛んに行われている．例えば，Martin-Löf の型理論に基づいた Formal Topology [9] や CZF における位相 [1] などが挙げられる．

Bishop の構成的数学では，通常の数学の定理（例えば，中間値の定理）が証明できないことを示すために，その定理が，（通常の数学では成り立つが）非構成的な原理を導くことを示す．また，その逆 – その非構成的原理が通常の定理を導く – も示すことにより，Bishop の構成的数学で通常の数学の定理を証明するために必要十分な非構成的原理を明確にすることができる．通常の数学のみならず直観主義数学や Markov の構成的数学が Bishop の構成的数学の拡張になっていることを考えると，直観主義数学や Markov の構成的数学における定理（例えば、KLST 定理）を Bishop の構成的数学で証明するために必要十分な原理を明確にすることも可能であり，そのような，構成的逆数学とも呼べる，分野が最近発展しつつある [6]．

参考文献

[1] Peter Aczel, *Aspects of general topology in constructive set theory*, Ann. Pure Appl. Logic **137** (2006), 3–29.

[2] Peter Aczel and Michael Rathjen, *Notes on constructive set theory*, Report No. 40, Institut Mittag-Leffler, The Royal Swedish Academy of Sciences, 2001.
(http://www.ml.kva.se/preprints/archive/2000-2001/2000-2001-40.pdf より入手可.)

[3] Helen Billinge, *Did Bishop have a philosophy of mathematics?*, Philos. Math. **11** (2003), 176–194.

[4] Errett Bishop, *Foundations of Constructive Mathematics*, McGraw-Hill, New York, 1967.
(改訂版が Errett Bishop and Douglas Bridges, *Constructive Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1985 として出版されている.)

[5] Douglas Bridges and Fred Richman, *Varieties of Constructive Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[6] Hajime Ishihara, *Reverse mathematics in Bishop's constructive mathematics*, Philosophia Scientiæ, Cahier spécial **6** (2006), 43–59.

[7] Per Martin-Löf, *Intuitionistic Type Theory* (Notes by G. Sambin of a series of lectures given in Padua, June 1980), Studies in Proof Theory **1**, Bibliopolis, Naples, 1984.

[8] Ray Mines, Fred Richman and Wim Ruitenburg, *A Course in Constructive Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1988.

[9] Giovanni Sambin, *Some points in formal topology*, Theoret. Comput. Sci. **305** (2003), 347–408.

[10] Anne S. Troelstra, *History of constructivism in the 20th century*, manuscript.
(http://staff.science.uva.nl/~anne/hhhist.pdf より入手可.)

[11] Anne S. Troelstra and Dirk van Dalen, *Constructivism in Mathematics, Vol.I. An Introduction*, North-Holland, Amsterdam, 1988.