

ヒルベルトのプログラムと逆数学

田中 一之 (東北大学 大学院 理学研究科)

Hilbert は、数学の論証のほとんどが 1 階論理(first-order logic) において形式化できること、そして数学の諸概念は自然数と簡単な集合の概念に還元できることに着目し、自然数とその集合を扱う 1 階理論(2 階算術 Z_2) の有限的性質(とくに無矛盾性) を明らかにすれば、数学のかなりの部分の明晰性が得られると考えた。その無矛盾性の問題も、結局は 1 階論理に関する決定問題(Entscheidungsproblem) に帰着できるので、Hilbert(1928) は、

“決定問題が数理論理学の中心的問題である”

と明言している。

しかし、Hilbert の企図は Gödel の不完全性定理(1931) により修正を余儀なくされる。Gödel の結果は、その論文の題名『... 形式的に決定不能な命題について』が語るように、決定問題が絶望的に難しいことを示している。この結果を一般化し、1 階論理の決定問題に否定的な決着をつけたのは、A. Church(1936) と A. Turing(1937) である。

彼らは決定可能性(=計算可能性=再帰性) とは何かを厳密に定義し、決定不可能な問題の存在を示すとともに、非可解性の度合いを調べる研究分野(再帰理論、計算可能性理論) を開拓した。

1960 年頃から、再帰理論における階層の研究と 2 階算術の部分体系の研究が合流し始める。その中で、70 年代半ば、H. Friedman は、 Z_2 の部分体系 RCA_0 (再帰的内包公理の体系) とそこから独立ないくつかの集合存在公理について、次のような現象に気付いた：

数学の主だった定理は、 RCA_0 で証明できてしまうか、

4 つほどの存在公理のどれかと同値であることが RCA_0 で証明できる。

80 年代に入ると、さらに多くの定理についてこの現象が確認され、S. Simpson らによってシステムチックな研究が進むとともに、逆数学(reverse mathematics) と呼ばれる研究プログラムに発展した。

「逆数学」は、Hilbert の企図とは対極にある非決定性の研究の中で生まれた高度技術を縦横に用いて、Hilbert のプログラムの現代的な意味を再考する研究テーマだといえるだろう。本講演では、「逆数学」の意義とその主要結果を、とくに講演者自身が携わった部分に焦点をあてて紹介する。