包括原理と超準的自然数

矢田部俊介

産業技術総合研究所
E-mail: shunsuke.yatabe@aist.go.jp

2007 年 11 月 11 日

古典論理を捨てて他論理を採用する場合、思わぬところにまで影響が及ぶことがある。本発表では、その事例報告として、ファジイ論理上で包括原理を持つ集合論を採用した場合、自然数の標準性を断念しなければならないことを紹介する。

包括原理 (任意の論理式 ψ に対して「ψ を満たすものの集合」$\{x : \psi(x)\}$ の存在を保証する) は古典論理上ではラッセルのパラドックスにより矛盾を導くが、古典論理より証明力が弱い論理上では矛盾を導かないことが知られている。この集合論の特長の一つは、以下のような**再帰的定義の強い一般化**が成立することである [C03]。すなわち、任意の論理式 $\varphi(x, \cdots, y)$ に対し、以下が成立する。

$$(\exists z)(\forall x)[x \in z \equiv \varphi(x, \cdots, z)]$$

つまり集合 z 自身をパラメーターとして使用して集合 z を定義してよい。もちろん、このような自己言及的な定義は古典論理上では許されない。つまり、再帰的定義を古典論理上で形式的に表現しようとすると、容易にラッセル・パラドックスと同型の矛盾を導く（実際、多くの関数型言語を古典論理上で形式化した場合、矛盾した体系となる）。しかし、再帰的定義は計算機科学における計算概念の根幹をなすため、それを十全に整合的に表現できることが望ましい。その点、縮約規則のない論理上の集合論は、再帰的定義の一般形を整合的に表現できるため、古典論理上の集合論に対しアドバンテージを持つと言えるだろう。

さて、包括原理を持つ集合論でどこまで数学が展開できるかを研究することは、数学をどこまで再帰的計算の概念に還元できるかを考える上で必要である。また、Frege の包括原理によって数学の基礎を展開しようという戦略の有効性を問うという点でも重要性を持つと思われる [M84]。包括原理を持つ集合論では、一般化された再帰的定義を使用し、自然数全体の集合 ω（0 を含み、後者関数について閉じている不動点として定義する）や任意の部分的再帰関数を表現できることが知られている。そのため、包括原理によって古典的数学のかなりの部分が展開でき [S57]、またその集合論は古典数学と整合的である（つまり古典数学では証明できない定理がその集合論で証明されることはない）のではないかという希望がいだかれていた。

しかしハジェクは、ファジイ論理の一種の Ł$\forall$ で包括原理を仮定した集合論 **CŁ**$\forall$ において、数学的帰納法を仮定すると矛盾が起こることを、純構文論的な手段で示し [H05]、また発表者はその証明を簡略化した [Y07]。今回の発表では、この定理を、Łukasiewicz 無限値述語論理上包括原理を持つ類似の集合論 **H** における、真理値を使ったより簡単な証明法により紹介する [Y05]。

Theorem 1 **H** は ω-矛盾。
つまり、ある論理式 φ が存在して、**H** の任意のモデル **M** で以下が成立する

- すべての標準的な自然数 n について $\|\varphi(n)\|_{\mathbf{M}} = 0$、
- $\|(\exists x \in \omega)\, \varphi(x)\|_{\mathbf{M}} = 1$。

この意味で $(\exists x \in \omega)\, \varphi(x)$ は「ω は必ず超準的な自然数を含む」と解釈できる。

同様の定理は Restall によって、ファジイ論理上で全域的な真理述語を持つ算術について証明されており、われわれの結果はその集合論版にあたる [R93]。

ファジイ論理は、一般的な再帰概念や全域的な真理述語といった概念を仮定しても矛盾を導かない論理の中で、最も証明力の強いものの一つであることが知られている。これらの理想的な概念が、その証明力を最も強めた状態で、超準的な算術の採用を強要するという事実は予想外のものであり、我々は自然数の超準モデルを不自然なものとして排斥する考え方 [P03] について再考する必要があるのかもしれない。

参考文献

[C03] Andrea Cantini. The undecidability of Grisǐn's set theory. *Studia logica* 74 (2003) pp.345-368

[H05] Petr Hajek. On arithmetic in the Cantor-Łukasiewicz fuzzy set theory. *Archive for Mathematical Logic* 44(6) (2005): 763 - 82.

[M84] J. Myhill. Paradoxes. *Synthese* 60 (1984) pp.129-143

[P03] C. Peacocke. Implicit Conceptions, Understanding and Rationality. Reflections and Replies: Essays on the Philosophy of Tyler Burge, pp. 117-52, MIT Press (2003),

[S57] T. Skolem. "Bemerkungen zum Komprehensionsaxiom" Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 3(1957) pp.1-17

[R93] Greg Restall, Arithmetic and Truth in Łukasiewicz's Infinitely Valued Logic. *Logique et Analyse*, 36 (1993) pp.25-38

[Y05] Shunsuke Yatabe. A note on Hajek, Paris and Shepherdson's theorem. *Logic Journal of IGPL*, pp.261-266, vol. 13(2), March 2005.

[Y07] Shunsuke Yatabe. Recursion contradicts to induction within Łukasiewicz logic. 国際会議 "Many Valued Logic and Cognition - Trends in Logic V Conference" （中国広州市）にて発表 (2007 年 7 月 8 日)