

素朴集合論の証明論的意味論解釈

矢田部俊介（京都大学）

昔から、素朴集合論は集合論か、それとも論理体系の一種かという議論があった。現代的な証明論的意味論の視点から見る場合、左右の \in 規則（包括原理を推件計算上で形式化したもの）は、右 \in 規則が（自然演繹での導入規則に相当する）右導入規則であり、また左 \in 規則が（自然演繹での除去規則に相当する）左導入規則であると見なすことができる。そのため、素朴な証明論的意味論の立場に立てば、論理結合子の一種であると見なすこともできる。

もちろん、何が論理結合子となるかは体系相対的である。 \in 規則は古典論理など縮約規則を持つ論理上では矛盾し体系を自明化する（ラッセルのパラドックス）し、体系を自明化するものは論理結合子とは呼べない。しかし、縮約規則なしの体系上では \in 規則は矛盾を導かないし、何よりも多くのそういう体系について証明の正規化可能性定理を簡単に証明することができる。これは、 \in 規則で導入される集合項が、結合子として他の結合子とハーモニーを奏でる（ダメット）ということであり、証明論的意味論の立場に立つ限り、集合項を結合子として認めない理由はない。

もちろん、別の反論があるだろう。存在論的含意、すなわち集合項のような「何か（集合）が存在する」という主張は、存在論から独立であるべき論理結合子にはふさわしくないというものである。例えばクワインの高階論理批判「高階論理は論理と言うより集合論である」を思い返せばよい。しかし、証明論的意味論は、証明論内在的に「何が結合子か」を示すことができる点が特色であり、存在論という外部の視点から批判してもあまり重要な論点にはなりにくいように思われる。そもそもクワインの存在論的批判は、高階論理の発達を妨げる一助を果たし、論理学にとって建設的なものではなかった

もちろん、それでも証明力が強すぎる体系を「論理」と呼ぶことにはわだかまりがある。 \in 規則を持つ体系では、算術がかなり展開できてしまい、世間での「論理」のイメージに合致するか疑問の余地がある。本発表後半では、 \in 規則を持つ体系での算術展開可能性をチェックし、体系の証明論的な強さを検討する。