

「公理主義」史観から見るヒルベルトの数学基礎論研究

井上 朋彦 (Tomohiko Inoue)

名古屋大学大学院

ダフィット・ヒルベルト (1862-1943) は幾何学, 数論, 代数学, 解析学, 数理物理学等さまざまな数学の分野に傑出した成果を残した偉大な数学者である. 彼が活躍した 20 世紀初頭は「ラッセル・ツェルメロのパラドクス」に代表されるような, 集合論や論理学上の諸パラドクスが相次いで発見された時代であり, 数学者, 論理学者や哲学者等さまざまな学問領域の人々が数学の基礎付けを模索した. ヒルベルトは数学基礎論研究においても主導的な役割を果たした. 彼はゲッティンゲン大学を拠点として, 一般に「形式主義」と称されるような数学基礎論上の立場を形成するに至ったが, ヒルベルト個人としては「公理的方法 *axiomatische Methode*」(後に「公理論 *Axiomatik*」) というアプローチを貫き続けたことにその特色があると言えるだろう.

林 2000 によると, 「公理主義」という言葉は日本独特のものであり, 元々は哲学者田邊元がヒルベルトらの数学基礎論の立場を説明するものとして *Axiomatik* に充てた訳語であったという. 今日では同語の訳として「公理論」が適切だとされているが, 同論文の指摘するように, この語は公理主義と比べると思想的ニュアンスの薄いものになる. 加えて, 「形式主義」がヘルマン・ヴァイルらの批判により使われるようになったことや, 当のヒルベルトらが数学基礎論の方法を語る際に一貫して「公理的方法」ないし「公理論」を使い続けたことを考慮すれば, 「公理主義」は彼らの数学基礎論上の立場を理解する説明枠組みとしてはむしろ最適であるようにも思える.

ヒルベルトの数学基礎論研究は, 彼の刊行物に従って, 前期と後期の二つの時代にしれば区分される. すなわち, 当時の非ユークリッド幾何学の発展も踏まえて幾何学の公理的提示を研究した著書『幾何学基礎論 *Grundlagen der Geometrie*』(1899) での成果に基づいて, 実数論を含む算術の体系の公理的に提示した論文「数概念について *Über den Zahlbegriff*」(1900)から, 代数的処理により初等数論の無矛盾性証明を追究した論文「論理学と算術の基礎 *Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik*」(1905) までの期間を「前期形式主義時代」, ブラウワーらの「直観主義」の立場を批判するとともに「証明論 *Beweistheorie*」を初めて提示した論文「数学の新しい基礎付け *Neubegründung der Mathematik*」(1922) から, ヒルベルトらの数学基礎論研究の集大成とも言い得るベルナイスとの共著『数学の基礎 *Grundlagen der Mathematik*』(I 巻 1934, II 巻 1939) までの期間を「後期形式主義時代」として分けられる.

前期と後期との間に空白を確認することができるが, この期間もヒルベルト及びその周辺の研究者は数学基礎論研究を行っていた. 例えば, 1917年にチューリヒで行われた講演「公理的思考 *Axiomatisches Denken*」は数学基礎論に対する当時の彼の方法論が表明されている. また Mancosu 2003 によると, ゲッティンゲンの数学コロキウム

では 1914 年頃を境にして数学基礎論を扱った発表が増えており、とりわけラッセル＝ホワイトヘッド『プリンキピア・マテマティカ Principia Mathematica』の研究が集中的に行われていたという。David Hilbert's Lectures シリーズでも数学基礎論及び論理学を題材としたこの時期の講義録が収録されており、1917/18 年冬学期「数学の原理 Prinzipien der Mathematik」は当時の数理論理学研究の最先端を行く内容であったことが Sieg 1998 等により報告されている。

ヒルベルトは数学の哲学に対して寡黙であり、刊行物自体もその豊かな業績に比してそれほど多くはないため、これまでは彼の数学観や数学基礎論の方法論を検討することは容易ではなかった。しかし、上述の David Hilbert's Lectures シリーズのように、Sieg 氏や Ewald 氏らの尽力によりゲッティンゲン大学図書館に保存されているヒルベルト関連の文書の出版が進んだことでその状況も変わってきている。本発表の研究は生前のヒルベルトの刊行物に加えて、こうした講義録等の没後の刊行物に批判的な検討を加えることで進められた。

本発表の試みは 1) ヒルベルトの数学基礎論研究を「公理主義」という枠組みで再定義し、2) ヒルベルトらの公理的方法（ないし公理論）が 1917-22 年間に形成されるとともに質的変容を遂げたことを確認する、という 2 点に集約される。