直観主義様相論理の一体系と非必然性様相

大西　琢朗（Takuro Onishi）
京都大学

本発表では、直観主義様相論理の一体系（U と呼ぶ）を提示する。厳密にはこの体系 U は、既存の体系(の部分)と同一であり、本発表の主旨はその再定式化と新たな視点からの分析にある。その分析においては、意外なことに、「非必然性」を表す負の様相演算子(negative modal operator)が重要な役割を果たす。

直観主義様相論理、すなわち直観主義論理上で展開される様相論理には、古典論理上の様相論理における K のような、誰もがひとまず認める標準的な体系はまだ存在していないと言ってよいだろう。直観主義論理のクリプキモデルの上に、様相演算子を定義するための 2 項関係(到達可能性関係)を加え、いくつかの技術的要請に素直に従って定式化したモデルで定義される論理は、直観主義論理の重要な性質である選言特性(disjunction property)を満たさない。つまり、直観主義論理らしい直観主義様相論理を作るためには、上記の「素直な定式化」に何らかの変更を加える必要がある。そして、どのような変更が直観主義論理らしいのかということになると、そこにはそれなりに議論の余地がある。例えば、Simpson (1994)は、上の選言特性も含めて、直観主義様相論理が満たすべき 6 つの要件を挙げており、たしかにそれらはどれももっともらしいものではあるが、それによって標準的な体系が 1 つに決まるわけではない。

本発表は、提示する体系 U を標準的体系として採用すべしと論じるわけではないが、Simpson の 6 要件に加えて、次の□と◇のあいだの「不完全な双対性」を、直観主義的な様相論理が満たすべき自然な条件として提案する。すなわち、

□¬A→¬◇A、¬◇A→□¬A、◇¬A→¬□A は妥当だが、¬□A→◇¬A は非妥当

□(必然性)はある種の普遍量化子∀ないし連言として、◇(可能性)はある種の存在量化子∃ないし選言とみなせるので、この要件は、直観主義(命題・量化)論理におけるそれらの性質からの自然な拡張と考えることができるだろう。この要件を満たす直観主義様相論理を構成し、分析するのが、本発表の目的である。

この要件を満たす論理としては、すでに Plotkin and Stirling (1986)の体系があり、本発表が提示する U はそれ（正確には彼らの体系から、上の要件とは無関係の公理を 1 つ落としたもの）と外延的には同一である。ただし、その論理を定義づけるクリプキモデルに課される条件、および□と◇にかかわるモデルにおける真理条件は、かなり異なっている。この相違は、本発表が、様相演算子を二重否定演算子として捉えていることに起因する。

他ならぬ直観主義論理の否定の真理条件が示しているように、否定はある種の様相演算子と見なすことができる。ただし、それは、必然性と可能性という正の様相に対置される負の様相である。そのなかでも直観主義論理の否定は、「到達可能なすべての世界で偽」という不可能性(impossibility)を表す演算子であり、さらに「到達可能なある世

界で偽」を表す非必然性(unnecessity)演算子も考えることができる。前者をここでは▹で、後者を▸で表すことにしよう。

否定が負の様相ならば、それを 2 つ重ねた二重否定は、マイナス掛けるマイナスで正の様相になるのではないかというのは、これも自然な考え方である。数は少ないが、二重否定を正の様相と見なして構成された体系もいくつかある(Dosen 1984, Restall 2000, Drobyshevich 2015)。一般的な事実としては、不可能性・非必然性の順で重ねられた二重否定、すなわち▹▸は必然性タイプの様相演算子となり、反対に非必然性・不可能性の二重否定▸▹は可能性タイプの様相演算子となる(それ以外の組み合わせは、追加の前提の有無に依存する)。

さて、直観主義論理の否定は先に述べたとおり不可能性タイプの負の様相演算子なので、それとは別に非必然性演算子▸と組み合わせて必然性□を¬▸として、可能性◇を▸¬として定義する。すると、□と◇の双対性は

$$\Box\neg A = \neg\blacktriangleright\neg A = \neg\Diamond A$$

により、定義そのものからただちに帰結する。本発表の体系 U のモデル論にかんする諸定義は、このアイディアに基づいて導かれるものである。

本発表では以上の体系 U のモデル論と証明論の定義、および完全性定理を確認する。時間に余裕があれば、双対直観主義論理(dual-intuitionistic logic)の否定と不可能性演算子で定義される双対直観主義的な正の様相演算子についても紹介し、検討する。

参照文献

Dosen, K. (1984). Intuitionistic double negation as a necessity operator. *Publications de l'Institut Mathématique, Nouvelle série*, 35(49), 15-20.

Drobyshevich, S. A. (2015). Double negation operator in logic [N. sup.*]. *Journal of Mathematical sciences*, 205(3), 389-403.

Plotkin, G., & Stirling, C. (1986). A framework for intuitionistic modal logics. In *Proceedings of the 1st Conference on Theoretical Aspects of Reasoning about Knowledge* (TARK) (pp. 399-406).

Restall, G. (2002). *An Introduction to Substructural Logics*. Routledge.

Simpson, A. K. (1994). The proof theory and semantics of intuitionistic modal logic. PhD. Thesis.