

直観主義命題論理と古典命題論理の組み合わせ論理 C+J に 対する論理式の意味の証明論的な分析

豊岡正庸 (Masanobu Toyooka)

北海道大学

本発表では直観主義命題論理と古典命題論理の組み合わせ論理 C+J に対して、論理式の意味を証明論的に分析する。直観主義命題論理と古典命題論理の組み合わせ論理とは、直観主義命題論理と古典命題論理の双方の論理結合子を含み、それぞれの論理に対して保存拡大である論理のことを指す。組み合わせ論理には様々な種類が存在するが、本発表では C+J と呼ばれる論理を議論の対象とする。組み合わせ論理 C+J は (Humberstone 1979) および (del Cerro & Herzig 1996) において提供された論理である。また、論理式の意味の証明論的な分析についても様々な試みが存在するが、本発表で用いるアイデアは (Restall 2009) にその根をもつ。しかし、(Takano 2018) で提供された手法を応用することで、(Restall 2009) のものよりも洗練された意味の分析を提供することが可能である。

直観主義命題論理と古典命題論理の組み合わせ体系 C+J は意味論上で考案されている。具体的には、C+J の意味論は直観主義論理のクリプキ意味論に、以下の充足関係をもつ古典論理の含意「 \rightarrow 」を加えることで得られる：

$$w \models_M A \rightarrow B \iff w \not\models_M A \text{ or } w \models_M B.$$

この組み合わせ論理 C+J に対して、証明論として (Humberstone 1979) では自然演繹が、(del Cerro & Herzig 1996) でヒルベルト公理系が与えられているが、本発表は (Toyooka & Sano 2021) で提供されたシーケント計算を基礎に据える。

一方、論理式の意味の証明論的な分析とは、真理値やモデルではなく、推論規則や論証に着目した意味の説明のことである。こうした意味の分析の代表例として、ブラウイツやダメットが提供した証明論的意味論 (Proof-Theoretic Semantics, 以下 PTS) があげられる。PTS は妥当性を定め、そのうえで当該の論理式を結論としてもつ妥当な論証が、論理式の意味であるとした。しかし、PTS には少なくとも四つの問題点があることが知られている。第一に、PTS の妥当性の基準に基づく場合、古典論理の体系内証明の中に妥当ではない論証が存在する。第二に、PTS では論理定項の導入則が除去則に対して概念的に優越する。第三に、PTS では論理式の意味が純粹に構文論的な対象となる。第四に、一般的な定式化に基づけば、直観主義論理の自然演繹体系は PTS に対して意味論的に完全ではない。

この四つの PTS の問題点を解消した証明論的な分析は (Restall 2005) および

(Restall 2009) で与えられている。第一に、この分析では古典論理の体系内証明の中に妥当ではないものがあるとはされず、直観主義論理と同様の仕方で論理式に意味を与えることができる。また、体系における論理定項に関する二つの推論規則のいずれも同等の重要性をもつものとして扱われる。実際、(Restall 2005) および (Restall 2009) では、証明体系としてシーケント計算が用いられているが、論理定項の左規則と右規則 (それぞれ自然演繹における除去則と導入則) はいずれも他方に優越するものではない。第三に、この分析では論証や体系内証明といった構文論的対象を直接用いて論理式の意味を説明するわけではない。体系内証明および体系を統御する推論規則からモデルを導き出し、そのモデルを用いて論理式に意味を付与する。第四に、この分析はそれ自体が意味論として解されるわけではなく、いかにしてモデル論的意味論が得られるかを説明するものである。それゆえこの分析自体が完全性の成立・不成立を問う対象にはならない。さらに、この分析はカノニカルモデルを経由した完全性証明のある哲学的解釈を提供する。

この分析は (Restall 2009) において古典論理・直観主義論理・様相論理 S5 に対して具体的に実行されているが、本発表では直観主義論理と古典論理が対象言語レベルで組み合わせられた論理に対しても、この分析を提供可能であることを示す。さらに、(Takano 2018) において、様相論理のシーケント計算に対して提供されている、推論規則の意味論的な分析を C+J に対して応用する。特に、この意味論的分析において中心的な役割を果たす、分析的飽和という概念を用いることで、(Restall 2009) の分析をより洗練されたものへと発展可能であることを示す。

《主な参考文献》

- del Cerro, L. F. and Herzig A.: Combining classical and intuitionistic logic or: Intuitionistic implication as a conditional. In Badder, F., Schulz, K.U. editors, *Frontiers of Combining Systems: FroCoS 1996*, pp.93-102. Springer, March 1996.
- Humberstone, L.: Interval semantics for tense logic: Some remarks. *Journal of Philosophical Logic*, 8: 171-196, 1979.
- Restall, G.: Multiple conclusions. In Hájek, P., Valdés-Vilanova, L., Westerståhl, D. editors, *Logic, Methodology and Philosophy of Science Proceedings of the Twelfth International Congress*, pp.189-205. King's College Publications, 2005.
- Restall, G.: Truth values and proof theory. *Studia Logica*, 92: 241-264, 2009.
- Takano, M.: A semantical analysis of cut-free calculi for modal logics. *Reports on Mathematical Logic*, 53: 43-65, 2018.
- Toyooka, M. and Sano, K.: Analytic multi-succedent sequent calculus for combining intuitionistic and classical propositional logic. In Ghosh, S., Ramanujam, R. editors, *ICLA 2021 Proceedings: 9th Indian Conference on Logic and its Applications*, pp.128-133, 2021.