

公理の有用性と加速定理
Usefulness of Axioms and Speedup Theorem

今村 拓万

Abstract

Usefulness is one of the most useful criteria when choosing a new axiom. This criterion is not based on mathematical platonism, so is acceptable for both mathematical formalists and anti-platonists. In this paper, I argue that this criterion is void when interpreting the term “useful” as “shortening the proofs”. The Ehrenfeucht–Mycielski speedup theorem plays an essential role in my argument. I briefly discuss the implication of my argument to mathematical platonism.

1 研究テーマ

Gödel [4] は、数学の基礎理論足り得る如何なる公理系も、その内には証明も反証も出来ない文を持つことを示した。Post はこの定理について次のように述べている (Post [11, p.295]) :

The conclusion is unescapable that even for such a fixed, well defined body of mathematical propositions, mathematical thinking is, and must remain, essentially creative.

A を何らかの数学の基礎となる公理系とすれば、Gödel の定理より、 A からは証明も反証も出来ない文 (独立な文) φ が存在する。我々は A に新たに φ または $\neg\varphi$ を公理として付け加えることで、より強い公理系 A' を得ることができる。 A' も Gödel の定理の前提条件を満たすので、 A' からは独立な文 ψ が存在する。我々は再び ψ または $\neg\psi$ の何方を公理として採用するかを選択を迫られる。この手続きはいくらでも繰り返すことが出来、決して完全な公理系に到達することはない。この公理選択という「創造的」営みは数学基礎論のひとつの役割であろう。本研究のテーマは公理選択の合理的基準である。すなわち、公理選択の営みはどのように進められるべきか、そのような指針は設定可能なのか、といった問いを扱う。

2 研究の背景・先行研究

いま A を数学の基礎となる公理系とする。Gödel の定理より、このような体系は必ず証明も反証も出来ない文 φ を持つ。 A に φ または $\neg\varphi$ を付け加えることでより強い公理系 A' を作ることができる。この際、どちらの公理を付け加えるのがより良いかを判断する基準を考えたい。もし我々が A に関する数学的実在論にコミットするならば、 A は数学的実体に関する真理を記述

する体系として意図されたものであるから、付け加える公理は数学的実在の世界に於いて真であるべきである。これが公理選択の指針となる。次に反実在論的な立場から公理の良し悪しを判断する基準を考えよう。既存の体系と新たな公理が無矛盾であるか、という整合主義的な判断基準は、この状況では何も教えてくれない。A に φ と $\neg\varphi$ のどちらを付け加えても無矛盾だからである。本紙では、実在論にコミットしない公理選択の基準として、どちらの公理の追加がより有用であるか、というプラグマティックな基準を検討する。

Zermelo–Fraenkel 集合論 ZF に選択公理 AC を追加することを考えよう。Gödel と Cohen が証明したように、AC は ZF に於いて証明も反証もできない命題である。¹ ZF は現代数学を展開するには不十分であり、AC がほぼ必須といってもよい状態になっている。² 例えば、超準解析を展開する為には、ZF では不十分であることが知られている。³ ZF に AC を付け加えることによって初めて超準解析が展開できるようになるということである。AC はこのような有用性によって良い公理であるといえることができる。他方で AC の否定 $\neg AC$ が数学に於いて有用な場面はあまり知られていない。⁴ したがって、有用性を基準にするならば、 $\neg AC$ ではなく AC を追加するのが良い、と言い得る。

3 筆者の主張

上の議論を完全にする為には「有用」とは何かということを明らかにしなければならない。そのひとつの基準として「既存の定理の証明がより簡単になるか」がある。ZF に於ける AC はこの基準を満たしているように思われる。例えば、ZF の定理であって、超準解析を（したがって隠伏的に AC を）用いることでより簡単に証明できるものが、多数知られている。この他にも AC が有効な場面は少なくない。本紙の目的はこの基準が実際には空虚であることを示すことである。

3.1 Ehrenfeucht–Mycielski の加速定理 計算可能性理論の基本的な概念を用いる (Griffor [5] を参照)。いま計算的枚举可能 (c.e.) な公理系 A に文 φ を追加した公理系 $A + \varphi$ を考える。ただし $A + \neg\varphi$ は決定不可能であると仮定する。矛盾した公理系は決定可能であるから、 $A + \neg\varphi$ は無矛盾である。すなわち φ は A で証明できない。したがって $A + \varphi$ は A よりも真に強力な公理系である。このとき新たに証明可能となる文はどれくらい豊富に存在するであろうか。次の定理はそのような文の集合が計算論的に非常に複雑であることを述べる。

補題 1. 任意の c.e. 公理系 A と文 φ に対して、 $A + \neg\varphi$ が決定不可能ならば、

$$\text{NewThm}(A, \varphi) = \{ \psi \mid A \not\vdash \psi \wedge A + \varphi \vdash \psi \}$$

は *c.e.* でない.

証明. 仮定より $A + \neg\varphi$ の定理集合 $\text{Thm}(A + \neg\varphi)$ は *co-c.e.* でない. ところが

$$\begin{aligned} \varphi \vee \psi \in \text{NewThm}(A, \varphi) &\iff A \not\vdash \varphi \vee \psi \\ &\iff A + \neg\varphi \not\vdash \psi \\ &\iff \psi \notin \text{Thm}(A + \neg\varphi). \end{aligned}$$

したがって, もし $\text{NewThm}(A, \varphi)$ が *c.e.* ならば, $\text{Thm}(A + \neg\varphi)$ は *co-c.e.* である. これは不合理. ゆえに $\text{NewThm}(A, \varphi)$ は *c.e.* でない. \square

公理系 A に於いて既に証明可能な文であっても, $A + \varphi$ ではもっと簡単に証明できる, ということが有り得る. 次の定理はそのような文が必ず存在し, さらにその簡単化の度合いを計算可能関数の範囲で自由に制御できることを示す.

定理 2 (Ehrenfeucht and Mycielski [3]). 任意の計算可能公理系 A と文 φ に対して, $A + \neg\varphi$ が決定不可能ならば, 任意の計算可能関数 $r: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ に対して, 文 ψ が存在して, $A \vdash \psi$ かつ $r \|\psi\|_{A+\varphi} \leq \|\psi\|_A$ が成り立つ. ここで $\|\varphi\|_A$ は A に於ける φ の証明図の複雑さ⁵の最小値を表す.

証明. いまこの定理が成立しないと仮定する. すなわち, 任意の文 ψ に対して,

$$A \vdash \psi \implies r \|\psi\|_{A+\varphi} > \|\psi\|_A$$

が成り立つ. 図形 Π に対して $|\Pi|$ で Π の複雑さを表す. すると

$$\text{NewThm}(A, \varphi) = \left\{ \psi \in \text{Thm}(A + \varphi) \left| \begin{array}{l} \forall \Pi. |\Pi| < r \|\psi\|_{A+\varphi} \\ \rightarrow \Pi \text{ is not a proof of } \psi \text{ in } A \end{array} \right. \right\}$$

より $\text{NewThm}(A, \varphi)$ は *c.e.* である. これは前補題に反する. \square

例として $r(x) = 2^x$ の場合を考えてみよう. Ehrenfeucht–Mycielski の定理より, A で証明可能なある文 ψ が存在して, $2^{\|\psi\|_{A+\varphi}} \leq \|\psi\|_A$ が成り立つ. この最後の不等式は $\|\psi\|_{A+\varphi} \leq \log_2 \|\psi\|_A$ と同じことである. すなわち, φ を公理として A に付け加えることによって, ψ の証明の複雑さが対数を取った分だけ減少するわけである. r をより急増加な関数とすれば, それに応じて証明の複雑さは急減少する. 一般に公理系 A とその拡大 A' について「 A で証明できる文が A' ではもっと簡単に証明できる」という形の定理を加速定理 (speedup theorem) という. Ehrenfeucht–Mycielski の定理は加速定理の典型例である.

3.2 有用性条件の空虚性 以上の準備のもとで、最初に述べた「有用性」の条件が空虚であることを示す。 A を数学の基礎となる公理系とする。より正確に言えば、 A は無矛盾かつ計算可能な公理系であって、Robinson 算術を翻訳可能であると仮定する。Rosser [12] はこのとき A が本質的決定不可能となることを示した。 φ を A に於いて証明も反証もできない文とする。 φ は A で証明されないので $A + \neg\varphi$ は無矛盾である。 A は本質的決定不可能であるから $A + \neg\varphi$ は決定不可能である。ゆえに A と $A + \varphi$ に対して Ehrenfeucht–Mycielski の定理が適用できる。すなわち、 A に於いて既に証明可能でありながら、 $A + \varphi$ に於いては遥かに簡単に証明できる、というような文が存在する。すなわち φ は有用である。ところがこの議論は A と $A + \neg\varphi$ に対しても通用する。すなわち φ だけではなく $\neg\varphi$ もまた有用である。したがって「既存の定理の証明がより簡単になるか」という有用性の条件は空虚である。

Ehrenfeucht–Mycielski の定理がその存在を教えてくれる文は、数学的には無内容であるかもしれない。そこで、有用性の条件を「数学的な内容を持つ定理の証明がより簡単になるか」といった風に変更すれば、上記の議論から逃れられる。ただし「数学的な内容を持つ」とは何であるかという別の問題が生じてくる。Arrow [1] の不可能性定理は、非独裁制などの望ましい諸条件を満たす社会的選択ルールが存在しないことを示す、社会的選択理論の基本定理である。これは一見すると数学的内容に乏しい定理のように思われるが、実際には、有限集合上には非単項超フィルターが存在しないという、集合論の定理と本質的に同じことを述べているのである (Kirman and Sondermann [9])。この事実を鑑みれば、Arrow の定理もまた (超フィルターに関する定理と同様に) 数学的な内容を持つものであることが分かる。⁶ これは次のことも示唆している。すなわち、ある命題が数学的な内容を持つものであるか否かは、それを評価する主体の知識、さらには、その時代の数学の在り方や他の学問との関係、といったものに依存する。一見して数学的な内容を持たないように思われる定理も、数学やその周辺分野の発展によって、あるいはパラダイムの転換によって、数学的な内容を持つものであると再評価される可能性を秘めている、ということである。

再び ZF と AC を例にこの状況を説明しよう。AC によって証明が簡単化される ZF の定理は、Ehrenfeucht–Mycielski の定理に訴えるまでもなく、具体的に挙げる事が出来る。それらは解析学に於ける定理であったり、位相空間論に於ける定理であったりする。それらは数学的な内容を持つ。他方で、Ehrenfeucht–Mycielski の定理がその存在を保証する、 $\neg AC$ によって証明が簡単化される定理は、数学的な内容を持っている保証がないのである。したがっ

て、AC は有用であると言えるが、 $\neg AC$ は有用であるとは言えない。⁷ しかしながら、このような公理選択基準は永久不変のものではなく、数学の有り様に左右されるものである。

3.3 数学的実在論への影響 前節の議論は数学的実在論に対しても含意を齎す。いま A を数学的実在の世界 W に於ける真理を記述する体系、 φ を A に於いて証明も反証も出来ない文とし、 φ の W に於ける真偽を調べたい。そこで、 A に対して φ を公理として付け加えた場合と、 $\neg\varphi$ を公理として付け加えた場合とを比較し、より良い公理を W に於いて真であると判断する。もちろん、これはアブダクションの形式を取っているから、可謬的であり、一般には真理性を担保しない。さて、ここで「良い」という語を前節までの「有用」と同じ意味に解釈するならば、前節の議論より、 A に於いて φ と $\neg\varphi$ はどちらも同様に良い公理となる。したがって φ の W に於ける真偽について何も知ることが出来ないわけである。

4 今後の展望

第一に、本紙の議論を科学的実在論にまで拡張することである。通常、検証したい自然法則が与えられたとき、それが現象と矛盾せず、かつ現象をより良く説明するならば、その物理法則は (近似的に) 真であると見做される (Harmann [6])。この場合には、「より良い説明」を「より簡単な説明」と同一視したとしても、本紙の議論をそのまま適用することは出来ない。基礎となる科学理論が加速定理の前提条件を満たすとは限らないからである。さらに、仮に加速定理の前提条件が満たされたとしても、定理によって存在が保証せられる加速可能な文が現象の記述になっている保証はない。したがって、本紙の議論を科学的実在論に適用する場合、何らかの修正を必要とする。もしそのような修正が可能ならば、これは Fraassen [14, p.146] による科学的実在論批判の議論を支持する傍証となりうる。

第二に、「有用性」のより精密な概念規定を行い、以って本紙で述べた空虚性の問題を克服することである。これにより、有用性に基づく公理選択の可能性が理論的に保証される。

注

¹ 選択公理の独立証明の詳細については Kunen [10] を参照。

² Howard and Rubin [7] には選択公理が本質的に関与する数学の諸定理が豊富に記されている。

³ZF に超準解析の原理を追加した公理系 IST^- は ZF よりも真に強くなる
ことが知られている。より正確には ZF に BPI と呼ばれる選択公理の弱形を
追加した公理系 $ZF + BPI$ の保存的拡大となる (Hrbacek [8]).

⁴ただし、このことは、 $\neg AC$ を仮定した数学がよく研究されていないとい
う、非本質的な理由によるものであるかもしれない。実際、1960 年代より、AC
と矛盾する (したがって $\neg AC$ を導く) 公理である決定性公理 AD が研究され、
その有用性が徐々に明らかになってきている。例えば田中 [15] を参照。

⁵ここで証明図の複雑さの尺度は static complexity measure (Blum [2]) を
成すものであれば何でもよい。最も簡単な例としては証明図のコードがある。

⁶なお、Arrow の定理は Brouwer の不動点定理とも同値であることが知ら
れている (Tanaka [13]) が、これらの間のつながりは、超フィルターに関する
定理との間のつながりほどには直接的ではない。

⁷これもまた $\neg AC$ を仮定した数学の研究が不十分であることに起因する
ものである可能性は否めない。数学的に内容のある定理の中から $\neg AC$ によっ
て簡単化されるものが見つかることは有り得る。

文献

- [1] Kenneth J. Arrow. *Social Choice and Individual Values*. John Wiley & Sons, 1951.
- [2] Manuel Blum. On the Size of Machines. *Information and Control*, 11(3):257–265, 1967.
- [3] Andrzej Ehrenfeucht and Jan Mycielski. Abbreviating proofs by adding new axioms. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 77(3):366–367, 1971.
- [4] Kurt Gödel. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38(1):173–198, 1931.
- [5] Edward R. Griffor, editor. *Handbook of Computability Theory*. Elsevier, 1999.
- [6] Gilbert H. Harman. The inference to the best explanation. *The Philosophical Review*, 74(1):88–95, 1965.
- [7] Paul Howard and Jean E. Rubin. *Consequences of the Axiom of Choice*. American Mathematical Society, 1998.

- [8] Karel Hrbacek. Axiom of Choice in nonstandard set theory. *Journal of Logic & Analysis*, 4(8):1–9, 2012.
- [9] Alan P. Kirman and Dieter Sondermann. Arrow’s theorem, many agents, and invisible dictators. *Journal of Economic Theory*, 5(2):267–277, 1972.
- [10] Kenneth Kunen. *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*. North Holland, 1983.
- [11] Emil L. Post. Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 50(5):284–316, 1944.
- [12] Barkley Rosser. Extensions of some theorems of Gödel and Church. *The Journal of Symbolic Logic*, 1(3):87–91, 1936.
- [13] Yasuhito Tanaka. On the equivalence of the Arrow impossibility theorem and the Brouwer fixed point theorem. *Applied Mathematics and Computation*, 172(2):1303–1314, 2006.
- [14] Bas C. van Fraassen. *Laws and Symmetry*. Oxford University Press, 1989.
- [15] 田中 尚夫. 決定性公理に関する最近までの諸結果について. *数学*, 29(1):53–64, 1977.

(京都大学)