相意味論による古典命題線形論理のコンパクト性定理の定式化
Formulation of Compactness Theorem for
Classical Propositional Linear Logic in Terms of Phase Semantics

鈴木 潤

Abstract

In this paper, we study compactness theorems for classical propositional linear logic in terms of its algebraic semantics, phase semantics. The ordinary compactness theorem of classical logic applies to sets of formulas. This formulation is unsuitable for classical propositional linear logic because of the lack of the structural rules. In this paper, we use a pair of sets to give a formulation of the compactness theorem for classical propositional linear logic in terms of phase semantics. Although a pair of sets of formulas cannot be regarded as a sequent of classical propositional linear logic, this formulation is compatible with Avron's concept of the external consequence relation.

1 研究テーマ

様々な論理体系において，構文論・証明論的研究に意味論・モデル論的手法が利用でき，意味論・モデル論的研究に構文論・証明論的手法が利用できるという，ある種の相互作用関係が見られる．筆者はこの現象に関心を持って研究している．このうち特に証明論の議論を介して証明できるモデル論的性質の基本的なものとして，本論文ではコンパクト性定理を取り上げる．

本論文では，古典命題線形論理についてその代数的意味論である相意味論を使ってコンパクト性定理を調べる．古典論理を含めた様々な体系で，コンパクト性定理は論理式の集合の組を使って定式化できる．本論文では，古典命題線形論理と相意味論においてもこの定式化がうまくいくことを示す．

2 研究の背景・先行研究

Girard [3] で導入された線形論理は，証明論と理論計算機科学との交点から生まれた論理である [1]．そのためモデル論的な側面の研究はそれほど盛んではない．本論文ではモデル論一般において最も基本的な性質であるコンパクト性定理を調べる．

本論文では，いくつかある線形論理体系のうち最も標準的なものである古典命題線形論理を扱う．まずこの体系の言語と証明体系を導入する．

定義 2.1 (古典命題線形論理の言語)**.** 古典命題線形論理の言語 $\mathcal{L}_{\mathbf{CLL}}$ を以下のように再帰的に定義する (ただし p は任意の命題記号)：

$$A ::= p \mid \mathbf{1} \mid \top \mid \bot \mid \mathbf{0} \mid {\sim}A \mid A \otimes A \mid A \,\&\, A \mid A \parr A \mid A \oplus A \mid A \multimap A \mid !A \mid ?A.$$

$\mathcal{L}_{\mathbf{CLL}}$ の要素 (i.e. **論理式**) の有限多重集合 [2] を $\Rightarrow$ の左右に並べた $\Gamma \Rightarrow \Delta$ のような記号列を，$\mathcal{L}_{\mathbf{CLL}}$ の**推件**という．

有限多重集合 Γ の要素をすべて $\otimes$ や $\parr$ で結んだものを $\bigotimes \Gamma$ や $\bigparr \Gamma$ のように書くとすると，推件 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ は $\bigotimes \Gamma \multimap \bigparr \Delta$ のことだと解釈できる．

古典命題線形論理の推件計算体系 **CLL** の規則は表 1 のようになる．縮約・弱化規則が $!, ?$ が付いた論理式のみに制限されているのが特徴である．$T \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{CLL}}$ とし，すべての $A \in T$ について $\Rightarrow A$ を公理として付け加えたときに推件 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が証明可能である場合 $T \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ と書き，$T \vdash \Rightarrow A$ は $T \vdash A$ と書くことにする．この $T \vdash A$ は Avron [1][3] において**外的帰結関係**と呼ばれるものである．

Girard [3, Section 1] では以下の定義からなる**相意味論**という代数的意味論も与えられており (ただし以下の定義の細部は Girard [4, Section 2.1.2] の改良されたもの)，健全性定理と強完全性定理が示せる．Girard [3, Section 1] では弱い形の健全性・完全性が，Avron [1, Corollary 3.17, Section 4.2] では強い形の健全性・完全性がそれぞれ示されている．

定義 2.2 (相モデル)**.** $\mathcal{M} = (|\mathcal{M}|, \cdot, 1)$ を可換モノイド [4]，$\perp$ を $|\mathcal{M}|$ の部分集合とする．組 $(\mathcal{M}, \perp)$ を**相空間**という．$X \subseteq |\mathcal{M}|$ に対して $\sim X$ を

$$\sim X = \{y \in |\mathcal{M}| \mid (\forall x \in X)[xy \in \perp]\}.$$

と定義する．命題記号から $\mathcal{P}(|\mathcal{M}|)$ への関数 v で，任意の命題記号 p について $\sim\sim v(p) = v(p)$ を満たすものを解釈関数といい，相空間 $(\mathcal{M}, \perp)$ と解釈関数 v の組 $(\mathcal{M}, \perp, v)$ を**相モデル**という．相モデル $\mathbb{P} = (\mathcal{M}, \perp, v)$ における **CLL** 論理式の解釈 $[\cdot]_{\mathbb{P}}$ は以下のように再帰的に定義する (ただし $\mathcal{I} \coloneqq \{i \in [\mathbf{1}]_{\mathbb{P}} \mid ii = i\}$):

- $[p]_{\mathbb{P}} = v(p)$, $[\mathbf{1}]_{\mathbb{P}} = \sim\sim\{1\}$, $[\top]_{\mathbb{P}} = |\mathcal{M}|$, $[\perp]_{\mathbb{P}} = \perp$, $[\mathbf{0}]_{\mathbb{P}} = \sim\sim\emptyset$,
- $[\sim A]_{\mathbb{P}} = \sim [A]_{\mathbb{P}}$,
- $[A \otimes B]_{\mathbb{P}} = \sim\sim([A]_{\mathbb{P}} \cdot [B]_{\mathbb{P}})$, $[A \,\&\, B]_{\mathbb{P}} = [A]_{\mathbb{P}} \cap [B]_{\mathbb{P}}$,
- $[A \parr B]_{\mathbb{P}} = \sim(\sim[A]_{\mathbb{P}} \cdot \sim[B]_{\mathbb{P}})$, $[A \oplus B]_{\mathbb{P}} = \sim\sim([A]_{\mathbb{P}} \cup [B]_{\mathbb{P}})$,
- $[A \multimap B]_{\mathbb{P}} = [\sim A \parr B]_{\mathbb{P}}$,
- $[!A]_{\mathbb{P}} = \sim\sim([A]_{\mathbb{P}} \cap \mathcal{I})$, $[?A]_{\mathbb{P}} = \sim(\sim[A]_{\mathbb{P}} \cap \mathcal{I})$.

するとすべての $A \in \mathcal{L}_{\mathbf{CLL}}$ について $[A]_{\mathbb{P}} = \sim\sim[A]_{\mathbb{P}}$ となる．また $1 \in [A]_{\mathbb{P}}$ のとき A は $\mathbb{P}$ で**真**であるといい，そうでないとき**偽**であるという．

コンパクト性定理の議論へ移ろう．準備として充足可能性を定義する．以下の表記や言葉は相意味論でも共通とし，**理論**とは論理式の集合のこととする．

表 1: シークエント計算 **CLL**

$$\frac{}{A \Rightarrow A}\ \mathbf{id} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad A, \Theta \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Lambda}\ Cut$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, {\sim}A}\ [{\sim}r] \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{{\sim}A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ [{\sim}l]$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \Theta \Rightarrow \Lambda, B}{\Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Lambda, A \otimes B}\ [\otimes r] \qquad \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \otimes B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ [\otimes l]$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \,\&\, B}\ [\&r] \qquad \frac{A_i, \Gamma \Rightarrow \Delta\ (i = 0, 1)}{A_0 \,\&\, A_1, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ [\&l_i]$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \parr B}\ [\parr r] \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad B, \Theta \Rightarrow \Lambda}{A \parr B, \Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Lambda}\ [\parr l]$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_i\ (i = 0, 1)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_0 \oplus A_1}\ [\oplus r_i] \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \oplus B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ [\oplus l]$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \multimap B}\ [\multimap r] \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad B, \Theta \Rightarrow \Lambda}{A \multimap B, \Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Lambda}\ [\multimap l]$$

$$\frac{}{\Rightarrow \mathbf{1}}\ [\mathbf{1}r] \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\mathbf{1}, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ [\mathbf{1}l] \qquad \frac{}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \top}\ [\top r]$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \bot}\ [\bot r] \qquad \frac{}{\bot \Rightarrow}\ [\bot l] \qquad \frac{}{\mathbf{0}, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ [\mathbf{0}l]$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{!A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ [!\mathbf{W}] \qquad \frac{!A, !A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{!A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ [!\mathbf{C}]$$

$$\frac{!\Gamma \Rightarrow ?\Delta, A}{!\Gamma \Rightarrow ?\Delta, !A}\ [!r] \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{!A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ [!l]$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, ?A}\ [?\mathbf{W}] \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, ?A, ?A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, ?A}\ [?\mathbf{C}]$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, ?A}\ [?r] \qquad \frac{A, !\Gamma \Rightarrow ?\Delta}{?A, !\Gamma \Rightarrow ?\Delta}\ [?l]$$

定義 2.3 (充足可能性)**.** 論理式 A がモデル $\mathbb{M}$ で真になることを $\mathbb{M} \models A$ と書く．理論 T のすべての要素 $A \in T$ について $\mathbb{M} \models A$ のとき $\mathbb{M}$ **は** T **のモデルである**といい，$\mathbb{M} \models T$ と書く．ある $\mathbb{M}$ で $\mathbb{M} \models T$ のとき，T は**充足可能**という．$\mathbb{M} \models T$ であるすべての $\mathbb{M}$ で $\mathbb{M} \models A$ となることを $T \models A$ と書く．

コンパクト性定理とは素朴には次のような主張である．

> **素朴なコンパクト性定理**：T を理論とする．T が充足可能 $\Longleftrightarrow$ T のすべての有限部分集合が充足可能.

つまり，無限かもしれない理論の充足可能性を，有限部分についての議論だけで済ますことができる．これによってモデル論的な議論が容易になる．古典一階述語論理では強完全性定理からすぐに素朴なコンパクト性定理を導くことができ [5]，密接な関係にある．

コンパクト性定理は一般化して前提と結論の組について述べることもできる．まず次の定義を導入しよう．

定義 2.4 (偽にするモデル)**.** S, T を理論とし，$\mathbb{M}$ をモデルとする．以下の 2 つの条件を満たすとき，$\mathbb{M}$ は (S, T) を**偽にする**という：

- すべての $A \in S$ について $\mathbb{M} \models A$,
- すべての $A \in T$ について $\mathbb{M} \not\models A$ ($\mathbb{M} \not\models A$ は「$\mathbb{M} \models A$ でない」の意).

これを使い次のようなコンパクト性定理の定式化ができる [6].

> **拡張したコンパクト性定理**：S, T を理論とする．(S, T) を偽にするモデルが存在する $\Longleftrightarrow$ S の任意の有限部分集合 S' と T の任意の有限部分集合 T' について，(S', T') を偽にするモデルが存在する．

組 (S, T) は，有限の論理式の組であった推件を無限にまで拡張したものと考えることもできる.「(S, T) が証明可能」を「S のある有限部分 S' と T のある有限部分 T' について推件 $S' \Rightarrow T'$ が証明可能」のことと定義すれば,「(S, T) が証明不可能ならば (S, T) を偽にするモデルがある」という強完全性定理と「偽にする」の定義から拡張したコンパクト性定理が従う．またこの定式化は，T を空とすれば素朴なコンパクト性定理が得られるという意味で素朴な定式化の拡張となっている．

古典論理では，$S \cup \neg T$ ($\neg T$ は T のすべての要素の頭に否定記号 $\neg$ を付けて得られる理論) という理論を考えれば素朴なコンパクト性定理から拡張したコンパクト性定理が言える．古典論理において「否定が真」と「偽」が同じことだからである．この議論が成立しないような論理についてもコンパクト性を述べることができるのが，この定式化を導入するメリットである．

3　筆者の主張

本節では相意味論による古典命題線形論理の拡張したコンパクト性定理を証明する．古典命題線形論理についてこの定式化を採用する意義は，外的帰結関係と相性が良いためである．

先に，拡張したコンパクト性定理に登場する (S, T) は推件の拡張とみなせると述べた．だが古典命題線形論理では推件とみなせない．もし $\mathcal{L}_{\mathbf{CLL}}$ の推件 (の両辺を無限を含め拡張したもの) を (S, T) としてしまうと，古典論理では自明な $(\Longrightarrow)$ 方向が言えなくなってしまう．弱化規則の制限があるために $\Rightarrow T'$ $(T' \subseteq T)$ が証明できても $\Rightarrow T$ が証明できない場合があり，(S, T) の拡張した証明可能性の定義と整合しないためである．外的帰結関係とは問題なく整合する．

また (S, T) を多重集合でなく集合の組として定義しているのも重要である．線形論理の推件は多重集合の組によって定義されており，縮約規則が制限されているために要素の数を無視できず，集合とみなせない．これも (S, T) が古典命題線形論理の推件の拡張とは言えない理由のひとつである．しかし外的帰結関係の左辺は集合であり，ひとつの公理を何度使用するかについて制限がない．この点と相性が良いのが集合による (S, T) の定義なのである．

なお相意味論では，素朴なコンパクト性定理は自明に言えてしまう．すべての論理式を真にするモデル (以下では**自明な相モデル**と呼ぶ) が，$|\mathcal{M}| = \bot$ とすることで作れてしまうからである．しかし，拡張したコンパクト性定理からは，素朴なコンパクト性定理の主張の「充足可能」を「自明でない相モデルが存在する」に変えたものも従う．これについても後述する．

では拡張したコンパクト性定理を示そう．第一歩は健全性定理である．なお，Avron [1] では強い健全性と強い完全性はより伝統的な代数的意味論を介して証明されているが，本論文では直接に相意味論に対して示す．

命題 3.1 (cf. Avron [1, Section 3, Section 4.2])**.** $T \cup \{A\} \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{CLL}}$ とする．このとき，$T \vdash A$ ならば $T \models A$.

証明. 任意の相モデル $\mathbb{P}$ を固定しすべての $A \in T$ について $1 \in [A]_{\mathbb{P}}$ とする．**CLL** の導出 $\mathcal{D}$ の構成についての帰納法で次を示せば十分である：

> $\mathcal{L}_{\mathbf{CLL}}$ のすべての推件 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ について，$\mathcal{D}$ の根が $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ならば $[\bigotimes \Gamma]_{\mathbb{P}} \subseteq [\bigparr \Delta]_{\mathbb{P}}$ (ただし $\Theta = \emptyset$ のとき $\bigotimes \Theta \coloneqq \mathbf{1}$ かつ $\bigparr \Theta \coloneqq \bot$).

$\square$

強完全性定理の証明のためには，まず次を定義する．

定義 3.2. $\mathcal{L}_{\mathbf{CLL}}$ の推件全体の集合を S と書く．S 上の 2 項関係 $\equiv_e$ を以下のように定義する：

$(\Gamma \Rightarrow \Delta) \equiv_e (\Theta \Rightarrow \Lambda) \iff \Gamma \Rightarrow \Delta$ と $\Theta \Rightarrow \Lambda$ は以下の 2 つを満たす：

1. $\{!A \mid !A \in \Gamma\} = \{!A \mid !A \in \Theta\}$ かつ $\{?A \mid ?A \in \Delta\} = \{?A \mid ?A \in \Lambda\}$ (Γ と Θ に属する最外に ! が付いた論理式の集合，Δ と Λ に属する最外に ? が付いた論理式の集合はそれぞれ等しい),
2. $\Gamma \backslash \{!A \mid !A \in \Gamma\} \equiv \Theta \backslash \{!A \mid !A \in \Theta\}$ かつ $\Delta \backslash \{?A \mid ?A \in \Delta\} \equiv \Lambda \backslash \{?A \mid ?A \in \Lambda\}$ (Γ, Θ から最外に ! が付かない論理式を除き，Δ, Λ から最外に ? が付かない論理式を除くと，それぞれ多重集合として等しい).

例えば $(!A, !A, B \Rightarrow C, ?D, ?D) \equiv_e (!A, B \Rightarrow C, ?D)$．この $\equiv_e$ は明らかに同値関係になっている．$\equiv_e$ による $\Gamma \Rightarrow \Delta$ の同値類を $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$ と書く．

この S と $\equiv_e$ を使って可換モノイドを作り，構文論的な相モデルを定義する．

定義 3.3. $T \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{CLL}}$ とする．相モデル $\mathbb{P}_T = (\mathcal{M}_T, \perp_T, v_T)$ を以下のように定義する：

- $|\mathcal{M}_T| = S/{\equiv_e}$,
- モノイド演算：$\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle \cdot \langle \Theta \Rightarrow \Lambda \rangle = \langle \Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Lambda \rangle$
- モノイドの単位元：空な推件の同値類 $\langle \Rightarrow \rangle$,
- $\perp_T = \{\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle \mid (\forall (\Theta \Rightarrow \Lambda) \in \langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle)[T \vdash \Theta \Rightarrow \Lambda]\}$,
- $v_T(p) = {\sim}\{\langle \Rightarrow p \rangle\}$.

この相モデルは以下の重要な性質を持つ．

補題 3.4 (cf. Girard [3, Theorem 1.17])**.** $T \cup \{A\} \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{CLL}}$ とする．このとき $[A]_{\mathbb{P}_T} = {\sim}\{\langle \Rightarrow A \rangle\}$.

証明. A についての帰納法で示せる． □

命題 3.5. $T \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{CLL}}$ とする．このとき $\mathbb{P}_T \models T$.

証明. 任意の $A \in T$ を固定する．$\langle \Rightarrow \rangle \in [A]_{\mathbb{P}_T}$ を示す．補題 3.4 より，$\langle \Rightarrow \rangle \in {\sim}\{\langle \Rightarrow A \rangle\}$ を示せばよい．明らかに $T \vdash A$ なので $\langle \Rightarrow A \rangle \in \perp_T$．よって $\sim$ の定義から $\langle \Rightarrow \rangle \in {\sim}\{\langle \Rightarrow A \rangle\}$. □

命題 3.6. $T \cup \{A\} \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{CLL}}$ とする．このとき $\mathbb{P}_T \models A$ ならば $T \vdash A$

証明. $\mathbb{P}_T \models A$ と仮定する．$\mathbb{P}_T$ の定義より，$\langle \Rightarrow A \rangle \in \perp_T$，すなわち $\langle \Rightarrow \rangle \in {\sim}\{\langle \Rightarrow A \rangle\}$ を示せばよい．仮定と補題3.4より，$\langle \Rightarrow \rangle \in [A]_{\mathbb{P}_T} = {\sim}\{\langle \Rightarrow A \rangle\}$ □

これらを合わせると強完全性定理は明らか．

命題 3.7. $T \cup \{A\} \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{CLL}}$ とする．このとき，$T \models A$ ならば $T \vdash A$.

また，目標であった拡張したコンパクト性定理も言える．

定理 3.8 (相意味論による古典命題線形論理の拡張したコンパクト性定理)**.** $S, T \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{CLL}}$ とする．(S, T) を偽にする相モデルが存在する $\iff$ S の任意の有限部分集合 S' と T の任意の有限部分集合 T' について，(S', T') を偽にする相モデルが存在する．

証明. $(\Longrightarrow)$ は明らか．$(\Longleftarrow)$ を示す．右辺を仮定する．仮定と定理3.1 (健全性定理) より，任意の有限な $S' \subseteq S$ と任意の $B \in T$ について，$S' \not\vdash B$ (S' を公理として付け加えても $\Rightarrow B$ は **CLL** で証明できない)．すると証明のサイズは有限なので，任意の $B \in T$ について $S \not\vdash B$ が言える．相モデル $\mathbb{P}_S$ を考えると命題3.5と命題3.6より，任意の $A \in S$ について $\mathbb{P}_S \models A$ かつ任意の $B \in T$ について $\mathbb{P}_S \not\models B$．よって (S, T) は $\mathbb{P}_S$ で偽となる． □

ここから，自明でない相モデルに関するコンパクト性定理も従う．

系 3.9. $T \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{CLL}}$ とする．T に自明でない相モデルが存在する $\iff$ T のすべての有限部分集合に自明でない相モデルが存在する．

証明. $(\Longleftarrow)$ のみ示す．右辺を仮定する．T の任意の有限部分集合 T' を考える．仮定より，T' の要素がすべて真でありかつある $A \in \mathcal{L}_{\mathbf{CLL}}$ が偽である相モデル，すなわち $(T', \{A\})$ を偽にする相モデルが存在する．すると定理3.8 (拡張したコンパクト性定理) より，$(T, \{A\})$ を偽にする相モデルが存在することが言える．これは T の自明でない相モデルである． □

4 今後の展望

本論文では，古典命題線形論理についてしかコンパクト性定理の考察を行えていない．直観主義線形論理や述語線形論理も存在し，それぞれに相意味論が与えられている．その他にも，構造規則の制限を強めたりあるいは緩めたりした論理とその意味論を考えることもできる．これらについても本論文と同様なコンパクト性定理の考察を行う必要がある．

また先述のとおり，本論文で証明に用いた前提と結論の組 (S, T) は，(古典命題) 線形論理の推件とはみなせない．だが，線形論理の証明論をより活かせるようなコンパクト性定理の定式化もありえよう．それは証明論的手法によるモデル論研究の，さらなる興味深いテーマとなるはずである．

注

[1] 線形論理の背景と論理学・計算機科学における意義は照井 [5] を参照.

[2] 多重集合とは要素の出現回数をカウントする集合のこと．例えば $\{1, 2\}$ と $\{1, 1, 2\}$ は 1 という要素の出現回数が異なるため別の多重集合となる．

[3] この文献をご教示くださった匿名の査読者に感謝する．

[4] 可換モノイドとは，2 項演算と単位元を持つ集合で，結合律と交換律を満たすもののこと．

[5] 例えば Enderton [2, p.142] を参照.

[6] この定式化は佐野勝彦氏に示唆を受けた.

文献

[1] Arnon Avron. The semantics and proof theory of linear logic. *Theoretical Computer Science*, Vol. 57, No. 2-3, pp. 161–184, 1988.

[2] Herbert B Enderton. *A mathematical introduction to logic*. Elsevier, 2001.

[3] Jean-Yves Girard. Linear logic. *Theoretical Computer Science*, Vol. 50, pp. 1–102, 1987.

[4] Jean-Yves Girard. Linear logic : its syntax and semantics. In Jean-Yves Girard, Yves Lafont, and Laurent Regnier, editors, *Advances in Linear Logic*, London Mathematical Society Lecture Note Series, pp. 1–42. Cambridge University Press, 1995.

[5] 照井一成. 線形論理の誕生. 数理解析研究所考究録, Vol. 1525, pp. 94–131, 2006.

（北海道大学）