

ハイブリッド論理でクリプキ意味論をどう越えるか

佐野勝彦

この発表ではハイブリッド論理という様相論理の一拡張が、クリプキ構造を越えて位相構造へと向かうとき何が起こるか、乗り越えるために何が必要かを概観したい。結論を先に言えば、従来のハイブリッド論理の公理系中の **BG** という推論規則がクリプキ構造をまさに特徴づけており、元の公理系からその規則を落とすことでクリプキ構造を越えることができる。「越える」際の試金石はハイブリッド論理のメリットである完全性に関する一般的結果 (pure 完全性) を保つか、である。

ハイブリッド論理 [1] とは、様相論理に、クリプキ構造の一点でのみ真となる命題記号 i (ノミナル) とノミナル i で真となる一点で命題 p が成立することを表す演算子 $@_i p$ (充足演算子) を加えた論理だ。このおかげでクリプキ構造に対する表現力は大幅に上がる。例えば通常の様相言語では表現できない到達可能性関係の非反射性 $\forall x. \neg xRx$ は $\neg @_i \diamond i$ で表現できる。 $\neg @_i \diamond i$ のような、命題記号として高々ノミナルしか含まない論理式は **pure** 式と呼ばれる。

ハイブリッド論理の公理系が特徴的なのは次の適用条件付きの推論規則を公理系に含む点だ：

(Name) $\vdash @_i \varphi$ ならば $\vdash \varphi$, ただし i は φ に出現しない。

(BG) $\vdash @_i \diamond j \rightarrow @_j \varphi$ ならば $\vdash @_i \Box \varphi$, ただし、 j は $@_i \Box \varphi$ に出現しない。

こういった規則を加えることで、上述の pure 式を追加公理とする どんな論理も、その式が表現するクリプキ構造に関して強完全性が成立するという一般的結果： **pure** 完全性が知られている。

意味構造を位相構造へと移すと、タルスキの業績からユークリッド空間がもつような位相的性質が様相言語の式で表現できないことが知られている。一方、ハイブリッド論理では、ユークリッド空間のもつ一部の性質を表現できることが知られており、クリプキ構造の場合と同様に表現力を増してくれる。しかし、クリプキ構造の場合の公理系は使えない。なぜなら、位相意味論の枠内で **BG** がまさにクリプキ構造を特徴づけることを証明できるためだ [2]。しかし、わずか **Name** だけを使ってもヘンキン・タルスキの発想を経由して位相構造版の pure 完全性を確立できる。

参考文献

- [1] C. Areces and B. ten Cate. Hybrid logics. In Patrick Blackburn, Johan van Benthem, and Frank Wolter, editors, *Handbook of Modal Logic*, pages 821–868. Elsevier, 2007.
- [2] B. ten Cate and T. Litak. Topological perspective on the hybrid proof rules. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 174(6):79–94, 2007.