

余帰納法の証明論への応用

秋吉亮太

京都大学文学研究科
(JSPS特別研究員PD)

2012年11月11日

はじめに

- 全体の目的：証明論と余帰納法 (Ω 規則周辺)
- Ω 規則：帰納的定義(inductive definition)
- Towsnerによる拡張： Ω 規則に余帰納法(co-induction)を持ち込む

帰納的定義

● 帰納的定義の例：構成的順序数 (Brouwer)

定義：

1. $0 \in \text{ON}$,

2. $x \in \text{ON} \Rightarrow x+1 \in \text{ON}$,

3. f : 何らかの再帰関数. $\forall x \in \omega. f(x) \in \text{ON} \Rightarrow \sup\{f(x) \mid x \in \omega\} \in \text{ON}$.

Brouwerの定義：「構成のはっきりとした」木を定義

帰納的定義の証明論

- 一般的な帰納的定義の体系 ID_1 : PAに次の公理を加えたもの.
- 自然数の部分集合上の (単調な) 帰納的定義 Γ に対する **最小不動点** の存在を主張 (一種の帰納法)

$$1. \Gamma(I_\Gamma) \subseteq I_\Gamma$$

$$2. \Gamma(A) \subseteq A \Rightarrow I_\Gamma \subseteq A.$$

帰納的定義の証明論へ

- Spector : 解析 (二階算術) の無矛盾性証明のために
バー・リカージョン(BR)を導入 (1962).
- Spectorの証明 : ディアレクティカ解釈の拡張
- BR: 非常に強い非可述性

帰納的定義の証明論へ

- 問題：BRは構成的か？
- クライゼル（やゲーデル）の期待：帰納的定義によってBRのモデルが作れる？
- 答え：それは不可能（BRの方が明らかに強い）
- ただし、帰納的定義ははっきりとした構成をもっている
ので、非可述な包括原理をある程度還元できるのでは？

帰納的定義の証明論へ

- T : 簡単な算術を含む程度の帰納的な形式的体系
- T の順序解析 : T の中で「 α は整礎である」といえるような最大の順序数 α を計算する事 ($|T|$ の計算)
- $|PA| = \epsilon_0$, $|RA| = \Gamma_0$, $|ID_1| = \psi_{\epsilon_{\Omega}+1}$

Ω 規則へ

- 非可述な包括原理の証明論の始まり：竹内の流れによる一連の仕事（1950年代～）
- 得られた順序解析： $\Pi_1^1 - CA$ の繰り返しまで.
- フェフアーマン・シュッテ学派：竹内の手法をよりわかりやすい方法で置き換えたい
- きっかけ：テイトの仕事（1970）
- 再帰的定義と二階算術の対応がわかっていたので、再帰的定義の証明論的解析を行えばよい

無限的証明論

- フェフアーマン・シュッテ学派の特徴：
 - (1) 無限の前提を持つ証明図を用いる,
 - (2) 集合論的な直観を伴った順序数の構築.
- ポーラーズ：Local Predicativity（現在の主流, テイトの仕事がその源流）
- ブフホルツ： Ω 規則

Ω 規則の利点

- Ω 規則：再帰的定義で導入され、順序数は不要（元々は順序解析が目的）。
- Ω 規則によって包括原理を再帰的定義に還元。
- 包括原理の複雑さを理解したいが、順序数は複雑。
- 最近の動機：どれくらいの再帰的定義（ないしは類する原理）があれば包括原理を解釈（理解）できるか？
- 非常に強い理論を解釈するには：余帰納法が必要（？）

Ω 規則とは？

- ブフホルツの教授資格論文で導入された無限的規則
- アイディア： $\Gamma(A) \subseteq A \Rightarrow I_\Gamma \subseteq A$ の「 $\rightarrow$ 」をBHK解釈で読む
- つまり、 $\forall x(\Gamma(A, x) \Rightarrow A(x))$ の仮定の下で、**どの** $I_\Gamma(x)$ の証明が与えられても $A(x)$ の証明に変形すればよい
- この「どの」の範囲： Ω 規則のドメインとよばれる

最小性公理の解釈

- $I_\Gamma(x)$ のカットなしの証明を, $A(x)$ の証明へと変形したい :

$$\begin{array}{c}
 \{q : I_\Gamma(x)\} \\
 \vdots \\
 \dots A(x) \dots \\
 \hline
 I_\Gamma(x) \rightarrow A(x) \quad \Omega \\
 \hline
 \forall x(I_\Gamma(x) \rightarrow A(x)) \\
 \hline
 \Gamma(A) \subseteq A \rightarrow I_\Gamma \subseteq A
 \end{array}$$

最小性の公理を解釈する

- $\forall x(\Gamma(A, x) \Rightarrow A(x))$ を仮定し, $I_\Gamma(x)$ の証明があるとする :

$$\begin{array}{c} \forall x(\Gamma(I_\Gamma, x) \rightarrow I_\Gamma(x)) \\ \vdots \\ I_\Gamma(x) \end{array}$$

Q. これをどのようにして $A(x)$ の証明にすればよいか？

最小性の公理を解釈する

- 答え： $I_\Gamma(x)$ を全て $A(x)$ で置き換えてしまう！

$$\begin{array}{c} \forall x(\Gamma(I_\Gamma, x) \rightarrow I_\Gamma(x)) \\ \vdots \\ I_\Gamma(x) \end{array}$$

以下の証明図が得られた事になる：

$$\begin{array}{c} \forall x(\Gamma(A, x) \rightarrow A(x)) \\ \vdots \\ A(x) \end{array}$$

最小性の公理を解釈する

- $\forall x(\Gamma(A, x) \rightarrow A(x))$ は仮定していたのでOK.

$$\begin{array}{c}
 \{q : I_{\Gamma}(x)\} \\
 \vdots \\
 \dots A(x) \dots \\
 \hline
 I_{\Gamma}(x) \rightarrow A(x) \quad \Omega \\
 \hline
 \forall x(I_{\Gamma}(x) \rightarrow A(x)) \\
 \hline
 \Gamma(A) \subseteq A \rightarrow I_{\Gamma} \subseteq A
 \end{array}$$

Ω 規則のまとめ

- ω 規則のドメイン： ω （自然数のあつまり）
- Ω 規則のドメイン： $I_{\Gamma}(x)$ の算術的な（カットを含まない）証明図（前提のインデックスは証明図）
- それ故： Ω 規則のドメインは Ω 規則を含まない（循環してはいない）
- キーアイディア： $I_{\Gamma}(x)$ を $A(x)$ で置き換える「代入」
- 代入こそが現代論理学の最も偉大な発明の一つ（アブラムスキー）

Ω 規則のまとめ

埋め込み定理： $ID_1 \vdash \Gamma \Rightarrow ID_1^\Omega \vdash_m^\alpha \Gamma$.

可述的カット消去定理： $ID_1^\Omega \vdash_{k+1}^\alpha \Gamma \Rightarrow ID_1^\Omega \vdash_k^{\omega^\alpha} \Gamma$.

非可述的カット消去定理： Γ が算術的な式するとき,

$$ID_1^\Omega \vdash_0^\alpha \Gamma \Rightarrow ID_1^\Omega \vdash_0^{\psi^\alpha} \Gamma.$$

ID_1 の順序解析： $|ID_1| = \psi\epsilon_{\Omega+1}$

Ω 規則の近年の発展

- ブフホルツ & シュッテ: 帰納的定義, 解析の部分体系の順序解析 (1970年代後半から1980年代)
- より強い体系に対する拡張: タウズナー (2008)
- 様相 μ 計算への応用: イェーガー&シュトゥーダー (2010)
- 完全カット消去定理: A & ミンツ (2011), A (2011)
- A & ミンツの手法の様相 μ 計算への応用: ミンツ (2011), ミンツ&シュトゥーダー

Ω 規則を拡張する

- Ω 規則を拡張するには：順序数に沿って繰り返す
- 再帰的定義を用いた Ω 規則を繰り返すだけでは強い体系 ($\Pi_2^1 - CA$) まで届かない. 定式化も複雑.
- Ω 規則のポイント：代入を用いて最小性の公理をBHK解釈
- ブフホルツの手法: fixed point operatorが束縛し合わない範囲で有効
- より強い場合はどうする???

Ω 規則を拡張する

- 元々の目的：順序解析
- 順序数が不要なため，包括原理の非可述性をもう少しわかりやすい原理に還元できないか？
- Π_1^1 －包括原理を Ω 規則で解釈できる（再帰的定義へと還元）
- より強い場合にはどのような原理が必要？
- 余帰納法を用いれば可能？

Ω 規則を拡張する

- fixed point operatorを $\mu x X.A(x, X)$ と書く事にする.
- 今までの理論にない例 : $n \in \mu x X.A(x, X, \mu y Y.B(y, Y, X))$
- このようなoperatorに関する最小性公理を持つ理論 : ID_I
- 典型的な Π_2^1 論理式とのアナロジー : $\forall X \exists Y A$

Ω 規則を拡張する

- $n \in \mu x X. A(x, X, \mu y Y. B(y, Y, X))$ を許す理論が Ω 規則で解釈できないのは、代入がうまく定義できないから
- 具体的に： Ω 規則のドメインが壊れる（強い非可述性）
- アイディア： Ω 規則を用いた埋め込みは再帰的に（証明図の上から）進むが、その中で余帰納法を用いる

Ω 規則を拡張する

- $\mu_A := \mu x X. A(x, X, \mu y Y. B(y, Y, X)), \mu_B := \mu y Y. B(y, Y, X)$
- $\mu x X. C$ が与えられたとき, μ の束縛の入れ子具合を lev と書く.
- 例えば $lev(y \in \mu x X. C) = n$ なら $lev(\neg y \in \mu x X. C) = n + 1$
- 上のような $y \in \mu_A$ については $lev(y \in \mu_A) := \omega$
- lev : それを導くのに Ω 規則を何回入れ子で使うか

Ω 規則を拡張する

- 注目すべき公理は次の二つ：

$$Ind : \forall x(A(F, x) \rightarrow F(x)) \rightarrow \forall x(x \in \mu_A \rightarrow F(x))$$

$$CL : A(n, \mu_A) \rightarrow n \in \mu_A$$

タウズナーのアイディア：埋め込みは再帰的に進むが、その中で余帰納法をつかいながら、うまく代入を定義.

Ω 規則のドメインの問題

- 代入 : $n \in \mu_A$ を $F(n)$ で置き換える.
- 次の例ではうまくいかない : Ω 規則のドメインは, あくまでも $q : x \in \mu_D(\mu_A)$ で, $q : x \in \mu_D(F)$ ではない !

$$\begin{array}{ccc}
 \{q : x \in \mu_D(\mu_A)\} & & \{q : x \in \mu_D(\mu_A)\} \\
 \vdots & & \vdots \\
 C & & C \\
 \hline
 \mu_D(\mu_A) \rightarrow C & \Omega & \mu_D(F) \rightarrow C \quad \Omega??? \\
 \vdots & \Rightarrow & \vdots \\
 \frac{A(n, \mu_A)}{n \in \mu_A} CL & & \frac{A(n, F)}{F(n)}
 \end{array}$$

Ω規則のドメインの問題

- そこでドメインの $n \in \mu_A$ を $F(n)$ で置き換える.
- ただし F は任意の複雑さ. ドメインがあらゆる F に対するものだとする. 定義が破綻する. (非可述性)

$$\begin{array}{c}
 \{q : x \in \mu_D(\textcolor{red}{F})\} \\
 \vdots \\
 C \\
 \hline
 \mu_D(F) \rightarrow C \quad \textcolor{red}{\Omega???} \\
 \vdots \\
 A(n, F) \\
 \hline
 F(n)
 \end{array}$$

Ω規則のドメインの問題

- Ω規則のドメイン $|\Omega|$ が任意の証明図としてみる.
- すると, $|\Omega|$ は当然Ω規則を含みうる.
- しかしながら, $|\Omega|$ を定義しない限りΩ規則は定義されない ($|\Omega|$ への量化を含んでいるので) . 故に循環.

$$\begin{array}{c}
 \{q : x \in \mu_D(\textcolor{red}{F})\} \\
 \vdots \\
 C \\
 \hline
 \mu_D(F) \rightarrow C \quad \textcolor{red}{\Omega???} \\
 \vdots \\
 A(n, F) \\
 \hline
 F(n)
 \end{array}$$

ドメインを拡張する

- タウズナーのアイディア：そのような問題のある箇所は一旦切っけてしまい下の推論規則Truncで置き換える

$$\overline{\Gamma, \Delta} \text{ Trunc}$$

- 新たな Ω 規則 (Ω_I) を導入し, ドメインは, $\mu_D(F)$ の証明図だがTruncを含んでいてよい
- 最後に: $\mu_B(\mu_A) \rightarrow C$ を導くための Ω 規則を導入.
- そのドメインは通常通り.

ドメインを拡張する

- 最小性の公理をどのように埋め込むのか？

$$Ind : \forall x(A(F, x) \rightarrow F(x)) \rightarrow \forall x(x \in \mu_A \rightarrow F(x))$$

- ID_I の証明を上から（帰納的に）通常の Ω 規則で解釈していく.
- もし問題のある箇所に遭遇したら一旦Truncで置き換える.
- 今度は、一番下のTruncから余帰納法的に、元の証明図を用いて復元してゆく.

拡張された Ω 規則のまとめ

- 埋め込みができてしまえばカット消去定理は容易.
- タウズナーの主結果：強い理論 ID_I を埋め込めて、算術的な帰結をもつ証明図からは全てカットが消える.

埋め込み定理： $ID_I \ni d \vdash \Gamma \Rightarrow ID_I^\Omega \ni d^\infty \vdash \Gamma$

非可述的カット消去定理： $ID_I^\Omega \ni d \vdash_0 \Gamma \Rightarrow ID_{I,0}^\Omega \ni \mathcal{D}_0(d) \vdash \Gamma$

いくつかの疑問点

- 以上がアイディアの概略だが、タウズナーの定義、証明は曖昧（に見える）。
- より具体的な疑問：
- この埋め込みステップがきちんと停止するのか？特に全てのTruncは消えるのか？もしそうだとしたらいつ？
- 埋め込みステップが止まるならばそのことを保証する原理とは？

まとめ

- タウズナーのアイディア： Ω 規則のキーである埋め込みと代入を，帰納的定義と余帰納法的定義を組み合わせることですうまく定義できるはず
- ただ，肝心の箇所が曖昧？？？
- 必要ならば秋吉・ミンツの手法で完全カット消去定理にもできる.
- Rathjen, Araiのような強い体系の順序解析が可能？

参考文献

- R. Akiyoshi, Complete Cut-Elimination Theorem for $\Omega_{\mu+1}$ – Rule, preprint, 2011.
- R. Akiyoshi and G. Mints, Analysis and Extension of Omega-Rule, Submitted, 2011.
- W. Buchholz, Explaining the Gentzen–Takeuti Reduction Steps, AML, 2001.
- W. Buchholz and K. Schuette, **Proof Theory for Impredicative Subsystems of Analysis**, Bibliopolis, 1988.
- G. Jaeger and T. Studer, A Buchholz Rule for Modal Fixed Point Logics, Logica Universalis 5, 2011.

参考文献

- G. Mints, Effective Cut-Elimination for a Fragment of Modal μ -calculus, *Studia Logica*, 2012.
- H. Towsner, Ordinal Analysis by Transformations, *APAL*, 2009.
- W.W. Tait, Applications of the Cut-Elimination Theorem to Some Subsystems of Classical Analysis, in **Intuitionism and Proof Theory**, A. Kino, J. Myhill, R.E.Vesley (eds.), North-Holland, 1970.