

S4 翻訳のモデル論的考察

山崎 紗紀子 (Sakiko Yamasaki)

首都大学東京 / 日本学術振興会

ゲーデルの S4 翻訳(例えば, 直観主義論理の原子式 P を様相論理の論理式 $\Box P$ へ翻訳し, 直観主義論理の論理式 $A \rightarrow B$ を様相論理の論理式 $\Box(A \rightarrow B)$ へと翻訳する翻訳関数)のもとで, 直観主義論理が様相論理 S4 へと埋め込み可能であることは, ゲーデル・マッキンゼイ・タルスキの定理としてよく知られた結果である。つまり, 直観主義論理である式 A が証明可能であることと, S4 でその翻訳式 A^\Box が証明可能であることが同値。この定理の証明は, 最初, ゲーデルによって直観主義論理から S4 の方向が与えられ, のちにマッキンゼイとタルスキによって逆方向の証明が与えられた。

ゲーデル・マッキンゼイ・タルスキの定理は, ある種の翻訳のもとで成り立つ, 直観主義論理と S4 の論理式の間での証明可能性関係について述べたものである。ところで, 直観主義論理も S4 もクリプキモデルに関して完全である。そこで, 直観主義論理と S4 の完全性から, この定理の言明を式の妥当性関係について述べたものへと書き換えることができる。つまり, 直観主義論理クリプキフレームで式 A が妥当であることと, その翻訳式 A^\Box が S4 クリプキフレームで妥当であることが同値になるということである。では, 直観主義論理である式を妥当にするクリプキモデルと S4 でその翻訳式を妥当にするクリプキモデルとの間にはどのような関係があるのだろうか。

論理体系には, 証明論的観点とモデル論的観点の二つの側面が存在する。そのことから, 式の証明可能性の観点, つまり, 証明論的観点に着目して, 二つの論理体系の間での関係を説明する翻訳関数が存在するのであれば, 式の妥当性の観点, つまり, モデル論的観点に着目した, 二つの論理体系の間での関係を説明する何かしらが存在すると考えるのは, 自然なように思われる。

本発表では, S4 翻訳をモデル論的観点から考察することで, 直観主義論理と S4 との間でどのような関係があるのかについて明らかにしていきたい。また, S4 翻訳をモデル論的観点から考察することの哲学的意義についても検討していきたいと思う。