

ゲンツェンにより指摘された「含意を巡る循環」について

高橋優太 (Yuta Takahashi)

慶應義塾大学

G・ゲンツェンは、自然数論の無矛盾性証明を含む1935年提出の論文([1])の中で、論理的含意を巡るある循環を指摘した。その循環とは、含意に関する推論規則の妥当性のある構成的な仕方で示そうとしても結局循環論法になってしまう、というものであった。そして、ゲンツェンは、含意命題 $A \supset B$ に対してこうした循環に陥らない解釈を与えることが、その1935年の無矛盾性証明の目的の一つであると述べた。ただし、当の循環を指摘するゲンツェンの議論は理解が容易な形では与えられなかったし、彼の無矛盾性証明が循環なしの含意解釈を与えていることの論証に至っては、少なくとも明示的には論文の中に現れていない。

[2, 3] において岡田は、循環を指摘するゲンツェンの議論を定式化し、その循環を回避する方法をゲンツェンによる1935年の無矛盾性証明とは独立に提案した。本発表では、そこで明らかにされた、循環を指摘するゲンツェンの議論の内実を踏まえた上で次を問うてみたい。ゲンツェンによる1935年の無矛盾性証明自体は、循環に陥らないような含意解釈を与えることができるのだろうか。

本発表の目的はこの問いに肯定的に答えることである。まず、循環を指摘するゲンツェンの議論を岡田の定式化に従って提示する。その次に、ゲンツェンに代わって発表者の立場から、ゲンツェンによる1935年の無矛盾性証明は循環なしの含意解釈を与えることができると論じる。そして、本発表の議論を通して、ゲンツェンの無矛盾性証明からは「妥当な原子的ステップの連なりとしての証明」という概念の特徴づけが得られることを主張したい。

参考文献

- [1] Gentzen, Gerhard, “Der erste Widerspruchsfreiheitsbeweis für die klassische Zahlentheorie”, *Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung*, **16** (1974), 97-118.
- [2] Okada, Mitsuhiro, “On a Theory of Weak Implications”, *The Journal of Symbolic Logic*, **53** (1988), 200-211.
- [3] Okada, Mitsuhiro, “Some remarks on difference between Gentzen's finitist and Heyting's intuitionist approaches toward intuitionistic logic and arithmetic”, *Annals of the Japan Association for Philosophy of Science*, **16** (2008), 1-18.