ヒルベルト初期数学の基礎研究の無矛盾性証明構想

―「無理数論の既知の推論方法」とは何か―

井上朋彦（Inoue Tomohiko）

名古屋大学大学院情報学研究科

ダフィット・ヒルベルト（David Hilbert, 1862-1943）は 20 世紀初頭のいわゆる「数学基礎論論争」で指導的な役割を果たした数学者である．彼の数学の基礎研究でしばしば注目されるのは「証明論」提示以降，つまり 1920 年代以降のものであるが，研究の発端は 1900 年頃の諸パラドクスの発見にまで遡ることができる．彼の初期の数学の基礎研究は 19 世紀数学の発展を背景としているが，またそれと同時に後年の研究にも活かされるようになった方法論や数学思想等もこの時期の研究に垣間見ることができる．ゆえに, 1900 年頃のヒルベルトの数学の基礎研究は, 19 世紀の数学の基礎研究と 20 世紀のそれとの結節点として考えることが出来るという意味で注目すべきものである．

ヒルベルトの数学の基礎研究は，幾何学の基礎を遂行する上で確立した「公理的方法」を算術の基礎研究に応用する形で始まった．公理的方法というのは，ある理論を展開する上で必要最小限な数の基本命題（=公理）から成る公理系を立て，その公理系が無矛盾といったメタ概念を満たしていることを証明するものである．ヒルベルトはまず幾何学の公理系の無矛盾性を実数論の無矛盾性に帰着させることで，間接的に幾何学の無矛盾性を証明した．そうなると今度は実数論の無矛盾性証明が問題となるが，このことについては実数論を含む算術の公理系を提示した上で（Hilbert (1900a)），この公理系に対する無矛盾性証明を未解決問題であるとした（Hilbert (1900b)）．

しかし，この時期のヒルベルトは算術の公理系の無矛盾性証明について「無理数論での既知の推論方法（Schlußmethoden）を，当面の目的に向くように適当に修正するのが良いと思う」（Hilbert (1900b)）という謎めいた記述を残すのみで，このとき彼がどの程度の見通しを持っていたのかは今一つ判然としない．Sieg & Schlimm (2005), Ferreirós (2009), Sieg (2013b) 等は，この時期のヒルベルトがデデキント流の「論理主義」に倣って算術の無矛盾性証明を与えようとしていたと主張する．デデキントは『数とは何か何であるべきか？』で，可算無限集合と同型な「一重無限システム（einfach unendliche Systeme)」を構成することにより，自然数概念の存在を証明した．すなわち，無矛盾な「論理モデル」を与えることで自然数概念の存在を証明したのであるが (Sieg (2013b))， 諸先行研究は, 1900 年頃のヒルベルトも，デデキントの影響の下に何らかの実数論の論理モデルを与えることで算術の公理系の無矛盾性を証明しようとしたのではないかと主張する(Ferreirós (2009), Sieg (2013b))．

たしかに，この時期のヒルベルトの研究方法にデデキントからの影響を見出すことは出来るのかもしれないが，それを過大に評価してはならないのもまた事実である．というのも，ヒルベルトは数学の基礎におけるデデキントの功績を認めつつも，その欠点

も同時に指摘し続けていたからである．例えば，算術の公理系を初めて提示した「数概念について」での生成的方法批判がある．生成的方法というのは，数学の基礎研究についての方法論として公理的方法と対比して挙げられたものであり，初めに 1,2,3,⋯ と数え上げるようにして自然数概念を定義し，その後自然数概念を拡張して，整数，有理数概念を得，最終的に基本列や「切断」等により無理数概念を得るという方法である．切断とはデデキントが完備順序体を与える際に導入した概念であるが，ヒルベルトはこの生成的方法について数学の基礎研究に適さないと述べている（Hilbert (1900a)). Sieg (2013b）は，「無理数論の既知の推論方法」という記述は，生成的方法が無矛盾性証明に有効であることを示唆しており，生成的方法批判には「切断」が挙げられてはいるものの，この記述をもってデデキントを指しているのではないと述べる．しかし，同論文は，デデキントの研究プログラムを (1) 自然数の論理的特徴づけ, (2) 自然数概念の整数，有理数への拡張, (3) すべての実数へのさらなる拡張，という 3 段階に集約しており，これはまさしく生成的方法そのものと考えることが出来ることから，同論文の主張は矛盾に陥っていると言わざるを得ない.

ヒルベルトがデデキントに批判的であったのならば，「無理数論の既知の推論方法」と言うとき，彼はどのような無矛盾性証明を念頭に置いていたのか. ヒルベルトの数学の基礎研究を歴史的に考察する際，現代の集合論や数理論理学等の知識が持ちだされがちであるが，意外にもこの時期のヒルベルトが実際のところどう考えていたのかということは軽視されてきた．本発表は，「無理数論の既知の推論方法」とは「ディリクレの原理（鳩の巣箱原理)」であるということを主張する．同原理は解析学に特有の「推論手法（Schlußweise)」であり，ヒルベルトは「数概念について」とほぼ同時に発表した「ディリクレの原理について」(Hilbert (1900c)）でその正当性を主張している．さらに，同原理を仮定することで，無理数を有理数で近似する「ディオファントス近似」に関連する定理を証明することもできる．1900 年頃のヒルベルトが解析的整数論に関心があり，また同原理が無理数と深い関わりをもつ推論手法であることを考えれば，同原理が算術の無矛盾性証明に何かしら有効であると見込んでいたと考えることもできるのである．本発表の試みはヒルベルトの初期数学の基礎研究におけるデデキントの影響を全く否定するものではないが，歴史的考察について従来とは異なる新たな可能性を提示できるものと考える.

参考文献

Ferreirós, J. (2009) ‘Hilbert, Logicism, and Mathematical Existence’, Synthese 170, pp. 33-70.

Hilbert, D. (1900a) ‘Über den Zahlbegriff’, 1899. 10. 12. 執筆. JDMV.

— (1900b) ‘Mathematisxhe Probleme’, Paris.

— (1900c) ‘Über das Diriclet’sche Princip’, 1899. 10. 11. 執筆. JDMV.

Sieg, W. [2013a] *Hilbert’s Program and Beyond*, Oxford University Press.

— (2013b), ‘Method for real arithmetic’ in Sieg (2013), pp. 73-90.

Sieg, W. and Schlimm, D. (2005) ‘Dedekind’s analysis of number: systems and axioms’, Synthese 147, 121-170. rep. in Sieg (2013a), pp. 35-72.