

ベース状況付きの弱下位直観主義論理に対する近傍意味論

豊岡正庸 (Masanobu Toyooka)

日本学術振興会・北海道大学

本発表では、ベース状況付きの弱下位直観主義論理に対して、近傍意味論を提供する。近傍意味論は (Scott 1970) および (Montague 1970) で様相論理に対して提供された。クリプキ意味論では、モデルは状況の非空な集合 W 、到達可能関係 R 、付値関数 V の三つ組みにより定義されるが、近傍意味論では到達可能関係 R の代わりに、 W を定義域とし、 $\mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$ を値域とする関数 N を用いて、モデルは定義される。近傍意味論では、必然性結合子「 \Box 」に対して、以下の充足関係が与えられる：

$$w \vDash_M \Box A \text{ iff } (A)^M \in N(w),$$

ただし、 $(A)^M$ はモデル M において A が成り立つ状況全体からなる集合。すでに (Chellas 1980) で指摘されている通り、近傍意味論はクリプキ意味論とは異なる仕方で必然性を捉えていると言え、その点に概念的意義がある。

一方、直観主義論理に対してもクリプキ意味論は提供されている。直観主義論理のクリプキ意味論では、含意結合子「 \rightarrow 」に対して、以下の充足関係が与えられる：

$$w \vDash_M A \rightarrow B \text{ iff for all } v \in W, wRv \text{ and } v \vDash_M A \text{ imply } v \vDash_M B,$$

ただし、 W は非空な状況の集合、 R は W 上の反射的かつ推移的な二項関係。この充足関係の定義からわかるように、直観主義論理の含意は様相論理における「 \Box 」と類比的に考えることができる。ゆえに、近傍意味論を用いることで、「 \Box 」のときと同様、異なる仕方で含意概念を捉えることができそうである。こうした試みは (Shirmohammadzadeh Maleki & de Jongh 2017) で、すでになされており、モデルにおいては W を定義域とし、 $\mathcal{P}((\mathcal{P}(W))^2)$ を値域とする関数 NB が、 N の代わりに用いられる。含意「 \rightarrow 」に対しては、以下の充足関係が与えられている：

$$w \vDash_M A \rightarrow B \text{ iff } ((A)^M, (B)^M) \in NB(w),$$

ただし、 $(A)^M / (B)^M$ はモデル M において A/B が成り立つ状況全体からなる集合。

直観主義論理のクリプキ意味論では、到達可能関係が反射性と推移性を満たし、付値関数が遺伝性と呼ばれる以下の性質を満たすことが前提される：

任意の $w, v \in W$ と命題変数 p について、 wRv かつ $w \in V(p)$ ならば $v \in V(p)$,

ただし、 W は非空な状況の集合、 R は W 上の反射的かつ推移的な二項関係、 V は付値関数。反射性・推移性・遺伝性のうちのいくつかを落として得られる論理一般を下位直観主義論理と呼ぶ。すべての意味論的性質を落として得られる論理を基礎とし、意味論的条件を加えていくことで、正規様相論理と同様、下位直観主義論理の全体が体系的に得られる。下位直観主義論理には二種類のグループが存在する。一つ目は (Corsi 1987) で提供され、 F と呼ばれる論理を基礎とする。二つ目は (Restall 1994) で提供され、 SJ と呼ばれる論理を基礎とする。後者はベース状況と呼ばれる特殊な状況の存在を前提するのに対し、前者はそうでないという点である。

様相論理における近傍意味論の利点の一つは、 K よりも弱い論理に対し意味論が提供可能である点である。これはクリプキ意味論では不可能である。また、特定の性質を満たす近傍意味論のモデルは、クリプキモデルに変形できることが知られている。ゆえに、近傍意味論はクリプキ意味論の一般化として機能し、 K から $S5$ にいたる様相論理の体系的理解を拡張する。類比的な議論が直観主義論理に対しても可能である。下位直観主義論理はクリプキ意味論の存在を前提にしているが、近傍意味論を用いることで、最弱の下位直観主義論理よりも弱い論理が提供可能となる。これらの論理を弱下位直観主義論理と呼ぶ。下位直観主義論理 F を弱めた論理はすでに (Shirmohammadzadeh Maleki & de Jongh 2017) で与えられているが、ベース状況付きのクリプキ意味論をもつ下位直観主義論理 SJ を弱めた論理はまだ与えられていない。本発表では、ベース状況付きの弱下位直観主義論理を、近傍意味論を用いて提供する。ベース状況付きの弱直観主義論理を提供することで、 SJ から直観主義論理にいたる体系的理解を拡張することができる。この体系的理解の拡張は、クリプキ意味論における含意概念と近傍意味論における含意概念の関係性を明らかにする点に、概念的意義がある。また、 F や SJ よりも弱い論理において、ベース状況の有無が引き起こす相違を観察することも可能となる。

加えて、証明論としてはヒルベルト公理系を提供する。このヒルベルト公理系は (Restall 1994) で提供された SJ に対するヒルベルト公理系を弱めることで得られる。その際、(Shirmohammadzadeh Maleki & de Jongh 2017) で提供された F を弱めた弱下位直観主義論理のヒルベルト公理系を参考にする。

<参考文献>

- Chellas, B.: *Modal Logic: An Introduction*. Cambridge University Press. 1980.
- Corsi, G.: Weak logics with strict implication. *Mathematical Logic Quarterly*, 33(5):389-406. 1987.
- Montague, R.: Universal grammar. *Theoria*, 36(3):373-398. 1970.
- Restall, G.: Subintuitionistic Logics. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 35(1): 116-129. 1994.
- Scott, Dana.: Advice on modal logic. In Lambert, K. editor, *Philosophical Problems in Logic: Some Recent Developments*, Vol 29 of Synthese Library (SYLI), pp.143-173. Springer, Dordrecht, 1970.

• Shirmohammadzadeh Maleki, F. and de Jongh, D.: Weak subintuitionistic logics. *Logic Journal of the IGPL*, 25(2):214-231. 2017.