Martin-Löf 型理論におけるマーロ宇宙がもつ非可述性

高橋 優太（Yuta Takahashi）

お茶の水女子大学

G・ゲンツェンが，順序型ε_0をもつ原始再帰的整列順序に関する超限帰納法を用いて 1 階算術の形式体系の無矛盾性を証明したのち[2,3]，順序数解析(ordinal analysis)という証明論の一分野が形成された．大まかにいえば順序数解析は，体系Tの証明論的順序数すなわちTの中で$TI(<)$が証明可能な原始再帰的順序$<$の順序型$otyp(<)$の上限を求めることを目的とする（ただし，ここで$TI(<)$は順序$<$の上の超限帰納法を表す）．ゲンツェンは，無矛盾性証明から証明論的順序数を求める手法を整備し，この手法は順序数解析における標準的な手法の一つとなった．ゲンツェンの成果はさまざまな仕方で拡張され，2 階算術の部分体系や Kripke-Platek 集合論といった形式体系が順序数解析の対象となっている．さらに，構成主義論理に基づく形式体系もその対象となり，構成主義数学を形式化するために考案された Martin-Löf 型理論(Martin-Löf Type Theory, MLTT)に対しても順序数解析が与えられた（例えば[6,5]がある）．

MLTT に対する順序数解析には，MLTT を，ヒルベルトが支持した有限の立場の拡張と見なせるという哲学的意義がある．ヒルベルトは，形式体系の無矛盾性証明が依拠すべき有限的な原理および推論方法から成る有限の立場を整備し，このもとで 2 階算術の無矛盾性を証明するというプログラムを提案した．「ヒルベルトのプログラム」と呼ばれるこの計画は，ゲーデルの不完全性定理により，当初ヒルベルトが想定していた有限の立場では 1 階算術の無矛盾性証明にとってさえ不十分であることが示された．上述のゲンツェンによる無矛盾性証明は，ヒルベルトの有限の立場を，順序型ε_0をもつ原始再帰的整列順序の上の超限帰納法によって拡張した立場のもとで与えられている．ゲンツェンのこの成果は，超限帰納法原理を備えた構成主義的体系を無矛盾性証明が依拠する立場と見なせることを示している．MLTT の証明論的順序数を求める過程では，MLTT の中でどの程度大きな順序型までの超限帰納法が証明できるかが明らかにされる．そのため，MLTT のさまざまバリエーションについて，その各々がどの程度大きな順序型までの超限帰納法を証明でき，どの程度強い形式体系の無矛盾性証明を与えうるのかが，順序数解析によって明らかにされる．

ゼッツァーは，再帰的マーロ順序数(recursively Mahlo ordinal)と類似した性質をもつ型であるマーロ宇宙(Mahlo universe)を導入することで MLTT を拡張し，さらに，この拡張により得られた体系に対して順序数解析を与えた[7,8]（この体系を以下では MLM と呼ぶ）．MLM の証明論的順序数は，例えばΠ^1_1-CA といった 2 階算術の非可述的な部分体系のものよりも大きい一方で，MLM じたいは構成主義的型理論の一種である．そのため，MLM は，2 階算術の非可述的な部分体系のいくつか

に対して無矛盾性証明を与えうる立場を提供するように思える．

しかし，マーロ宇宙に対しては，その非可述性(impredicativity)が指摘されており[4]，この点で MLM は非構成的であり有限の立場の拡張とはいえないのではないかという懸念がある．大まかに述べれば，マーロ宇宙Mは次の意味で非可述的である．以下では，Mの復号関数(decoding function)をTと表すことにする．MLM では，Mに属する型の族$\Sigma_{(x:M)}(T(x) \to M)$の上の全域関数$f$が与えられたとき，$M$の要素として，関数$f$で閉じている宇宙型$U_f$を構成することができる．つまり，$M$のコンストラクタとして，$f\colon (\Sigma_{(x:M)}(T(x) \to M)) \to \Sigma_{(x:M)}(T(x) \to M)$を入力としてとり，$f$で閉じた宇宙型$U_f$を返すものがある．問題は，このコンストラクタに対する入力となるfの型の中にMが負に現れている(occur negatively)点である．つまり，fはMの要素U_fを構成するコンストラクタの入力であるにもかかわらず，全域関数であるfの定義域にはMじたいが現れており，Mの存在が前提されているように見えるということである．さらに言い換えれば，U_fは，自身が属することになるMを定義域に含むような全域関数をもとに構成される．以上の意味での非可述性は，集合および概念の非可述的定義における非可述性とは形が違うものの，構成主義の観点から見てマーロ宇宙は問題含みであることを示している．

本発表の目的は，マーロ宇宙がもつ非可述性は構成主義的観点から見て問題を含まないと論じることである．そのための手がかりとして，本発表は，集合および概念の非可述的定義に対してカルナップが与えた正当化[1]に着目する．カルナップは，論理主義を標榜しつつ非可述的定義の正当化を与えたが，ここでの正当化は，数学におけるプラトニズムをとるか構成主義をとるかという問題とは独立であり，構成主義に基づく MLTT の立場でもこの正当化のアイデアを支持できると考えられる．また，カルナップのこの正当化はいわば証明論的な仕方で非可述的定義の意味を説明するものであり，意味説明(meaning explanation)という証明論的意味論の一種を備える MLTT を用いてカルナップの議論を敷衍することは，構成主義と論理主義の関係を再考するという点でも意義があるといえる．

参考文献

[1] Rudolf Carnap. The logicist foundations of mathematics. In Paul Benacerraf and Hilary Putnam, editors, *Philosophy of Mathematics: Selected Readings, Second Edition*, pages 41–52. Cambridge University Press, 1984.

[2] Gerhard Gentzen. Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. *Mathematische Annalen*, 112:493–565, 1936.

[3] Gerhard Gentzen. Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie. *Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften*, 4:19–44, 1938.

[4] Erik Palmgren. On universes in type theory. In Giovanni Sambin and Jan M. Smith, editors, *Twenty Five Years of Constructive Type Theory*, Oxford Logic Guides, pages 191–204. Oxford University Press, 1998.

[5] Michael Rathjen, Edward R. Griffor, and Erik Palmgren. Inaccessibility in constructive set theory and type theory. *Ann. Pure Appl. Log.*, 94(1-3):181–200, 1998.

[6] Anton Setzer. Well-ordering proofs for Martin-Löf type theory. *Ann. Pure Appl. Logic*, 92(2):113–159, 1998.

[7] Anton Setzer. Extending Martin-Löf type theory by one Mahlo-universe. *Arch. Math. Log.*, 39(3):155–181, 2000.

[8] Anton Setzer. Universes in type theory part I – Inaccessibles and Mahlo. In A. Andretta, K. Kearnes, and D. Zambella, editors, *Logic Colloquium '04*, pages 123–156. Association of Symbolic Logic, Lecture Notes in Logic 29, Cambridge University Press, 2008.